Capitolul III

ECUAŢII CU DERIVATE PARŢIALE

§.1. ECUAŢII CU DERIVATE PARŢIALE DE ORDINUL m

1. GENERALITĂŢI

Definiţie. Se numeşte *ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul* m o relaţie de forma

$$F\left(x_1, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_n^{m_n}}\right)=0, \tag{1}$$

$$m_1+m_2+\ldots+m_n=m,$$

unde F este o funcţie reală, $(x_1, \ldots, x_n) \in D \subset \mathbf{R}^n$, iar $u=u(x_1, \ldots, x_n)$este o funcţie necunoscută care apare în (1) împreună cu derivatele ei parţiale pînă la ordinul m inclusiv.

Definiţie. Ecuaţia (1) se numeşte liniară dacă F este o funcţie liniară în u şi derivatele sale.

Definiţie. Ecuaţia (1) se numeşte cvasiliniară dacă F este o funcţie liniară în derivatele lui u de ordinul cel mai mare.

Definiţie. Se numeşte soluţie a ecuaţiei (1) într-un domeniu $D \subset \mathbf{R}^n$ orice funcţie $u=\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in C^m(D)$ astfel ca:

$$F\left(x_1, \ldots, x_n, \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial^m \varphi}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_n^{m_n}}\right)=0$$

pentru orice $(x_1, \ldots, x_n) \in D$.

Definiţie. Se numeşte soluţie generală a ecuaţiei (1) o soluţie care conţine m funcţii arbitrare de $(n-1)$ variabile.

În aplicaţiile concrete care conduc la ecuaţii cu derivate parţiale se cer de obicei soluţii speciale care verifică anumite condiţii iniţiale.

O problemă specială importantă, care se pune şi se rezolvă în cazul ecuaţiilor cu derivate parţiale este, „problema Cauchy". A rezolva „problema Cauchy" pentru ecuaţia (1) înseamnă a determina soluţia u care împreună cu derivatele sale $\frac{\partial^k u}{\partial h^k}$, $\left(k=1, 2, \ldots, m-1 ; \frac{\partial}{\partial h} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}, \xi_i \text{ unde } \xi_i = h_i / \sqrt{h_1^2 + \ldots + h_n^2} \text{ sînt cosinușii directori ai direcției } h=(h_1, \ldots h_n) \in \mathbf{R}^n\right)$ ia valori date pe o hipersuprafață dată $\sum_{n-1}$, $(n-1)$ dimensională, h fiind o direcție oarecare din R^n netangentă la $\sum_{n-1}$.

Definiție. O funcție $f : D \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ este analitică (olomorfă)în domeniul D, dacă pentru orice $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in D$ există o vecinătate a punctului x^0 în care f se poate dezvolta în serie Taylor, adică

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k_1, \ldots, k_n = 0}^{\infty} a_{k_1 \ldots k_n} (x_1 - x_1^0)^{k_1} \ldots (x_n - x_n^0)^{k_n} \tag{2}$$

Se poate demonstra următoarea teoremă de existență și unicitate (a se vedea [53]) :

Teoremă (Cauchy-Kovalevskaia)

Dacă ecuația (1) se poate scrie sub forma

$$\frac{\partial^m u}{\partial x_1^m} = f\left(x_1, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_n^{m_n}}\right), \tag{3}$$

$$m = m_1 + \ldots + m_n,$$

unde f este o funcție analitică care nu mai depinde de derivata $\frac{\partial^m u}{\partial x_1^m}$, atunci problema Cauchy

$$u(x)\Big|_{x_1 = x_1^0} = v_0(x_2, \ldots, x_n), \; \frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|_{x = x_1^0} = v_1(x_2, \ldots, x_n), \tag{4}$$

$$\ldots \frac{\partial^{m-1} u}{\partial x_1^{m-1}}\Big|_{x_1 = x_1^0} = v_{m-1}(x_2, \ldots, x_n),$$

v_i, $(i=0, 1, \ldots, m-1)$ fiind funcții analitice într-un domeniu $D \subset \mathbf{R}^{n-1}$ astfel ca $(x_2^0, \ldots, x_n^0) \in D$ (f fiind analitică într-un domeniu, care conține punctul $(x_1^0, \ldots, x_n^0, u_0, \ldots)$), admite o singură soluție analitică.

2. CARACTERISTICE

În cele ce urmează ne limităm pentru ușurința calculelor la o ecuație cu derivate parțiale de ordinul al doilea. Rezultatele obținute își păstrează valabilitatea și în cazul ecuației de ordinul $m > 2$.

În cazul $m=2$ ecuația (1) devine

$$F\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right) = 0 \tag{5}$$

cu $u \in C^2(D)$; $D \subset \mathbf{R}^n$ și $x = (x_1, \ldots, x_n) \in D$.

Efectuînd asupra variabilelor $x_1, \ldots, x_n$ o schimbare regulată de clasă $C^2(D)$ definită prin relaţiile

$$\xi_r = \xi_r(x_1, \ldots, x_n), \quad r = 1, 2, \ldots, n \tag{6}$$

$$\left(\text{unde } \frac{D(\xi_1, \ldots, \xi_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)} = 1 \Big/ \frac{D(x_1, \ldots, x_n)}{D(\xi_1, \ldots, \xi_n)} \neq 0 \right) \text{avem}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial \xi_r} \cdot \frac{\partial \xi_r}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_r \partial \xi_s} \frac{\partial \xi_r}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \xi_s}{\partial x_j} + \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial \xi_r} \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial x_i \partial x_j}, \tag{8}$$

$i, j = 1, 2, \ldots, n$ şi deci ecuaţia (5) devine

$$\Phi\left(\xi_1, \ldots, \xi_n, \frac{\partial u}{\partial \xi_r}, \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_r \partial \xi_s} = 0\right) \tag{9}$$

cu

$$\Phi\left(\xi_1, \ldots, \xi_n, \frac{\partial u}{\partial \xi_r}, \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_r \partial \xi_s}\right) =$$

$$= \mathrm{F}\left(x_i(\xi_1, \ldots, \xi_n), u, \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial \xi_r} \cdot \frac{\partial \xi_r}{\partial x_i}, \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_r \partial \xi_s} \frac{\partial \xi_r}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_s}{\partial x_j} + \right.$$

$$\left. + \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial \xi_r} \cdot \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial x_i \partial x_j}\right), \tag{10}$$

unde $x_i = x_i(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ se obţin prin inversare din (6).

Fie acum f şi g funcţii date pe o hipersuprafaţă

$$(\Sigma_{n-1} : H(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ (H \in C^2(D)) \tag{11}$$

$h = (h_1, \ldots, h_n)$ o direcţie din $\mathbf{R}^n$ netangentă în nici un punct la Σ_{n-1}, iar

$$u(x)\Big|_{\Sigma_{n-1}} = \mathrm{f}, \quad \frac{\partial u(x)}{\partial h}\Big|_{\Sigma_{n-1}} = \mathrm{g} \tag{12}$$

problema Cauchy generală ataşată ecuaţiei (5).

Putem determina întotdeauna transformarea

$$\xi_1 = H(x), \ \xi_r = \xi_r(x), \ r = 2, 3, \ldots, n \tag{13}$$

de tipul (6) astfel ca $\frac{\partial u}{\partial h}\Big|_{\Sigma_{n-1}}$ să se transforme în $\frac{\partial u}{\partial \xi_1}\Big|_{\xi_1=0}$ (a se vedea în [53]).

Astfel problema generală Cauchy pentru ecuaţia (5) se transformă în problema Cauchy restrînsă relativă la hiperspaţiul $\xi_1 = 0$. Conform teoremei (aplicată pentru $m = 2$) această problemă are soluţie unică dacă (9) se poate scrie sub forma

$$q_{11} = \psi(\xi_1, \ldots \xi_n, u, q_r, q_{rs}), \tag{14}$$

unde s-a notat $q_r=\dfrac{\partial u}{\partial \xi_r}$, $q_{rs}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi_r \partial \xi_s}$, $(r, s=1, 2, \ldots, n)$ și s-a presupus că membrul drept din (14) nu mai depinde de q_{11}. Din teoria funcțiilor implicite se știe că derivata q_{11} poate fi explicitată din (9) dacă

$$\frac{\partial \Phi}{\partial q_{11}} \neq 0 \tag{15}$$

Notînd $p_{ij}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$, $(i, j=1, 2, \ldots, n)$ și ținînd cont de (8) se deduce

$$\frac{\partial \Phi}{\partial q_{11}}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial p_{ij}}\frac{\partial p_{ij}}{\partial q_{11}}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial p_{ij}}\frac{\partial \xi_1}{\partial x_i}\frac{\partial \xi_1}{\partial x_j}$$

Deoarece $\xi_1=H(x_1, \ldots, x_n)$, (15) devine

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial p_{ij}}\frac{\partial H}{\partial x_i}\frac{\partial H}{\partial x_j}\neq 0 \tag{16}$$

adică o condiție restrictivă pentru hipersuprafața $\sum_{n-1}$.

Definiție. Ecuația cu derivate parțiale

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial p_{ij}}\cdot\frac{\partial H}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial H}{\partial x_j}=0 \tag{17}$$

se numește ecuația caracteristică a ecuației (5), dacă

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial x_i}\right)^2\neq 0.$$

Definiție. Varietățile $H(x_1, \ldots, x_n)=$constant, unde $H(x_1, \ldots, x_n)$ sînt soluții ale ecuației caracteristice, se numesc caracteristicile ecuației (5).

Din considerațiile precedente rezultă.

Teorema. Condiția necesară și suficientă pentru ca problema Cauchy (12) (cu f și g analitice) atașată ecuației (5) (cu F analitică) să admită o soluție analitică este ca hipersuprafața (11) (cu H analitică) să nu fie o caracteristică a ecuației (5).

Caracteristicile nu apar numai în legătură cu rezolvarea problemei Cauchy ci joacă un rol fundamental în teoria ecuațiilor cu derivate parțiale.

Astfel caracteristicile joacă un rol important în clasificarea ecuațiilor aproape liniare de ordinul al doilea, fapt pe care îl vom ilustra, în cele ce urmează, în cazul particular $n=2$.

3. CLASIFICAREA ECUAȚIILOR APROAPE LINIARE DE ORDINUL AL DOILEA. REDUCEREA LA FORMA CANONICĂ.

Să considerăm ecuația aproape liniară

$$A(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+C(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)=0 \tag{18}$$

unde A, B şi C sînt funcţii reale definite pe un domeniu oarecare $D \subset \mathbf{R}^2$, care nu se anulează simultan pe D.

Ecuaţia caracteristică este conform cu (17).

$$A(x, y)\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2+2B(x, y)\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial y}+C(x, y)\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2=0 \tag{19}$$

Ţinînd cont că din forma $H(x, y)=$constant, a soluţiilor pentru (19) rezultă $y'=-\frac{\partial H}{\partial x}\Big/\frac{\partial H}{\partial y}=r(x, y)$ avem şi forma echivalentă cu (19)

$$Ar^2-2Br+C=0 \tag{20}$$

Din (19) se obţine

$$\frac{B\pm\sqrt{B^2-AC}}{A}=y'$$

şi de aici rezultă prin integrare, în general, două familii de curbe caracteristice:

$$\varphi_1(x, y)=k_1, \quad \varphi_2(x, y)=k_2 \tag{21}$$

Se poate face următoarea clasificare:

1. Dacă $B^2-AC>0$ în D, atunci cele două familii de caracteristici sînt reale şi distincte. În acest caz zicem că ecuaţia (18) este de tip hiperbolic în D.

2. Dacă $B^2-AC=0$ în D, avem o singură familie de caracteristici reale. În acest caz zicem că ecuaţia (18) este de tip parabolic în D.

3. Dacă $B^2-AC<0$ în D, atunci cele două familii de caracteristici sînt complex conjugate. În acest caz zicem că ecuaţia (18) este de tip eliptic în D.

Se poate întîmpla ca B^2-AC să nu păstreze un semn constant în tot domeniul D. În acest caz, D se împarte în regiuni după semnul expresiei B^2-AC.

Printr-o schimbare de variabilă regulată

$$\xi=\xi(x, y),\ \eta=\eta(x, y),\ \frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)}\neq 0, \tag{22}$$

($x=x(\xi, \eta)$, $y=y(\xi, \eta)$ fiind transformarea inversă) ecuaţia (18) devine

$$a(\xi, \eta)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2b(\xi, \eta)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+c(\xi, \eta)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+$$

$$+d\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=0 \tag{23}$$

cu:

$$a(\xi, \eta)=A\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}+C\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2$$

$$b(\xi, \eta)=A\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}+B\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)+C\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$c(\xi, \eta)=A\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}+C\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2$$

Expresiile acestor coeficienți care sînt de forma membrului întîi al ecuației (19) ne sugerează că ecuația (23) poate lua o formă mai simplă dacă se particularizează transformarea (22) folosind funcțiile $\varphi_i(x, y)$ $(i=1, 2)$ și se ține cont că aceste funcții sînt soluții pentru ecuația (19).

Dacă ecuația (18) este de tip hiperbolic atunci

$$a(\varphi_1, \varphi_2) \equiv 0,\ c(\varphi_1, \varphi_2) \equiv 0,\ b(\varphi_1, \varphi_2) \neq 0$$

În consecință (18) se transformă prin

$$\xi = \varphi_1(x, y),\ \eta = \varphi_2(x, y)$$

în ecuația

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = d_1\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$

numită forma canonică a ecuației de tip hiperbolic.

Dacă ecuația (18) este de tip parabolic atunci, $\varphi(x, y) = k$ fiind singura familie de caracteristice, avem

$$a(\varphi, \eta) \equiv 0,\ b(\varphi, \eta) \equiv 0,\ c(\varphi, \eta) \neq 0$$

unde s-a ales arbitrar $\eta \neq \varphi$. Ecuația (18) se transformă prin

$$\xi = \varphi(x, y),\ \eta = \eta(x, y)$$

în

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = d_2\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right),$$

numită forma canonică a ecuației de tip parabolic.

Dacă ecuația (18) este de tip eliptic atunci $\varphi_i (i=1, 2)$ sînt complex conjugate. Raționînd analog ca în cazul ecuațiilor de tip hiperbolic se obține ecuația transformată

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = d_3\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\xi \eta}\right),$$

ξ și η fiind complex conjugate. Pentru a reveni la variabile reale se efectuează transformarea

$$\varphi = \frac{\xi + \eta}{2},\ \psi = \frac{\xi - \eta}{2i}$$

și se obține ecuația

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} = d_4\left(\varphi, \psi, u, \frac{\partial u}{\partial \varphi}, \frac{\partial u}{\partial \psi}\right)$$

numită forma canonică a ecuației de tip eliptic.

§2. ECUAŢII CU DERIVATE PARŢIALE LINIARE DE ORDINUL m CU COEFICIENŢI CONSTANŢI

În acest paragraf ne vom ocupa de ecuaţii cu derivate parţiale liniare de forma

$$\sum_{i_1+\ldots+i_n=m} a_{i_1,\ldots,i_n} \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{i_1}\ldots\partial x_n^{i_n}}=f(x_1,\ldots,x_n), \tag{24}$$

unde coeficienţii $a_{i_1},\ldots,a_{i_n}$ sînt constanţi, care au o largă aplicabilitate în fizică şi tehnică.

4. ECUAŢII OMOGENE CU DOUĂ VARIBILE INDEPENDENTE

Să considerăm operatorul liniar

$$L_m=\sum_{i=0}^{m} a_i \frac{\partial^m}{\partial x^{m-1}\partial y^1}, \tag{25}$$

unde a_i $(i=0, 1, \ldots, m)$ sînt coeficienţi constanţi.

Definiţie. Ecuaţia

$$L_m(u)=0 \tag{26}$$

se numeşte ecuaţie cu derivate parţiale liniară omogenă de ordinul m cu coeficienţi constanţi cu două variabile independente.

Ecuaţia (26) este evident un caz particular al ecuaţiei (24) (cînd $n=2$ şi $f\equiv 0$).

Definiţie. Polinomul

$$P_m(r)=\sum_{i=0}^{m} a_i r^{n-1} \tag{27}$$

se numeşte polinomul caracteristic asociat ecuaţiei (26).

Dacă $P_m(r)$ are rădăcinile reale şi distincte r_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ operatorul L_m se poate scrie

$$L_m=a_0\left(\frac{\partial}{\partial x}-r_1\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}-r_2\frac{\partial}{\partial y}\right)\ldots\left(\frac{\partial}{\partial x}-r_n\frac{\partial}{\partial y}\right). \tag{28}$$

În cazul cînd $P_m(r)$ are rădăcinile reale r_i, $(i=1, 2, \ldots, p)$ avînd respectiv ordinele de multiplicitate k_i, $(i=1, 2, \ldots, p)$ se deduce imediat că avem

$$L_m=a_0\left(\frac{\partial}{\partial x}-r_1\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(k_1)}\left(\frac{\partial}{\partial x}-r_2\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(k_2)}\ldots\left(\frac{\partial}{\partial x}-r_p\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(k_p)}, \tag{29}$$

cu $\sum\limits_{i=0}^{p} k_i=m$.

În baza relației (29) se deduce că are loc:

Teorema. Dacă polinomul caracteristic (27) al ecuației (26) are rădăcinile reale r_i, avînd respectiv ordinele de multiplicitate k_i $(i=1, 2, \ldots, p)$ astfel ca $\sum_{i=1}^{p} k_i=m$, atunci soluția generală a ecuației (26) este dată de expresia

$$u(x, y)=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{k_i} x^{j-1} f_{ij}(y+r_i x) \tag{30}$$

unde f_{ij} sînt m funcții arbitrare cu derivate pînă la ordinul m continue pe un interval $I \subset R$.

Să considerăm acum ecuația particulară

$$L_2(u)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+(\alpha^2+\beta^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{31}$$

cu $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Polinomul caracteristic asociat lui (31) este

$$P_2(r)=r^2-2\alpha r+(\alpha^2+\beta^2)$$

și are rădăcinile complexe $r_1=\alpha+i\beta$, $r_2=\alpha-i\beta$. Prin schimbarea de variabilă

$$\varphi=y+\alpha x, \quad \psi=\beta x$$

ecuația (31) se transformă în

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2}=0 \tag{32}$$

numită ecuația lui Laplace. Cu ajutorul operatorului lui Laplace

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \tag{33}$$

ecuația (32) se mai scrie și sub forma

$$\Delta u=0 \tag{34}$$

Soluțiile ecuației (34), se numesc funcții armonice. Dacă f este o funcție complexă olomorfă atunci $u=\Phi(\varphi, \psi)$, unde $\Phi=\mathbf{Re}\, \mathrm{f}$ (sau $\Phi=\mathbf{Im}\, \mathrm{f}$), este armonică. Deducem, că ecuația (31) admite soluții de forma

$$u=\Phi(y+\alpha x, \beta x), \tag{35}$$

unde Φ este o funcție armonică arbitrară.

5. ECUAȚII NEOMOGENE ITERATE CU n VARIABILE INDEPENDENTE

Să considerăm operatorul liniar

$$L=\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad a_n \neq 0, \tag{36}$$

cu $a_i \in \mathbf{R}$, $(i=1, 2, \ldots, n)$. Cu ajutorul operatorului (36) formăm operatorul

$$L^{(2)}=L(L)=\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+2 \sum_{j>i=1}^{n} a_i a_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

numit iteratul operatorului L.

Definiţie. Operatorul

$$L^{(p)}=L\left(L^{(p-1)}\right) \tag{37}$$

se numeşte iteratul de ordinul p al operatorului L.

Ne vom ocupa în cele ce urmează cu soluţiile unei ecuaţii de forma

$$L^{(m)}(u)=\mathrm{f}\left(x_1, \ldots, x_n\right) \tag{38}$$

pe care o vom numi ecuaţie neomogenă iterată. Presupunem $f \in C^{(m)}$ în $D \times I$, $D \subset \mathbf{R}^{n-1}$, $I \subset \mathbf{R}$.

Are loc

Teorema. Dacă $u_1(x_1, \ldots, x_n)$ este soluţia generală pentru ecuaţia omogenă $L^{(m)}(u)=0$, iar $u_0(x_1, \ldots, x_n)$ este o soluţie particulară a ecuaţiei neomogenă (38), atunci soluţia generală a ecuaţiei (38) este dată de

$$u=u_1+u_0.$$

Într-adevăr avem prin ipoteză

$$L^{(m)}(u_1) \equiv 0, \quad L^{(m)}(u_0) \equiv \mathrm{f}(x)$$

şi deci

$$L^{(m)}(u)=L^{(m)}(u_1+u_0)=L^{(m)}(u_1)+L^{(m)}(u_0) \equiv \mathrm{f}(x).$$

În probleme concrete, care conduc la ecuaţii cu derivate parţiale, nu se cere soluţia generală a ecuaţiilor respective ci o soluţie particulară care satisface la anumite condiţii suplimentare, numite condiţii la limită. Vom ilustra modul de determinare a unei soluţii particulare pentru ecuaţia (38) în condiţii la limită date.

Să presupunem că se caută soluţia ecuaţiei (38) care satisface condiţiile la limită

$$L^p(u)\Big|_{x_n=0}=0, \quad p=0, 1, \ldots, m-1. \tag{39}$$

Are loc

Teorema. Soluţia u a ecuaţiei (38), care satisface în $D \times I$, $D \subset \mathbf{R}^{n-1}$, $I \subset \mathbf{R}$, condiţiile (39) este dată de

$$u(x_1, \ldots, x_n)=\frac{1}{a_n^m} \frac{1}{(m-1)!} \int_0^{x_n}(x_n-t)^{m-1} f\left(\frac{a_1}{a_m}(t-x_m)+x_1, \ldots\right.$$

$$\left.\ldots, \frac{a_{n-1}}{a_n}(t-x_n)+x_{n-1}, t\right) \mathrm{d} t. \tag{40}$$

Într-adevăr din (40) avem

$$\frac{\partial u}{\partial x_k}=\frac{1}{a_n^m}\frac{1}{(m-1)\,!}\int_0^{x_n}(t-x_n)^{m-1}\frac{\partial f}{\partial \xi_k}\,dt,\ k=1,2,\ldots,n-1$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_n}=\frac{1}{a_n^m}\frac{1}{(m-2)\,!}\int_0^{x_n}(x_n-t)^{m-2}\,\mathrm{f}\,dt-$$

$$-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{a_n^{m+1}}\cdot\frac{1}{(m-1)\,!}\int_0^{x_n}(x_n-t)^{m-1}\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \xi_k}\,dt,$$

unde $\xi_k=\frac{a_k}{a_n}(t-x_n)+x_k,\ k=1,\ldots,n-1.$

Deducem că

$$L(u)=\frac{1}{a_n^{m-1}}\cdot\frac{1}{(m-2)\,!}\int_0^{x_n}(x_n-t)^{m-2}\,\mathrm{f}\,(\xi_1,\ldots,\xi_{n-1},t)\,dt$$

şi în general

$$L^{(k)}(u)=\frac{1}{a_n^{m-k}}\cdot\frac{1}{(m-k-1)\,!}\int_0^{x_n}(x_n-t)^{m-k-1}\,\mathrm{f}\,(\xi_1,\ldots,\xi_{n-1},t)\,dt$$

$k=0,1,\ldots,m-1$ şi, dintr-un caz precedent, rezultă $L^{(m)}(u)=\mathrm{f}$.

Soluţia dată de (40) se stabileşte prin inducţie (a se vedea [10]).

Analog se poate arăta că pentru ecuaţia

$$L^{(m)}(u)=\mathrm{f}\,(x_1,\ldots x_n),\quad \mathrm{f}\in C^{(m)}\ \text{în}\ D\times I \tag{41}$$

cu condiţiile la limită

$$L^{(k)}(u)\Big|_{x_n=0}\ v_k(x_1,\ldots,x_{n-1}),\ k=0,1,\ldots,m-1, \tag{42}$$

cu $v_k\in C^{(m)}$ în D, are loc:

Teorema. Soluţia u a ecuaţiei (41) care satisface în $D\times I$, $D\subset \mathbf{R}^{n-1}$ $I\subset\mathbf{R}$, condiţiile (42) este dată de

$$u(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{k\,!}\left(\frac{x_n}{a_n}\right)^k v_k\left(x_1-\frac{a_1}{a_n}x_n,\ldots,x_{n-1}-\frac{a_{n-1}}{a_n}x_n\right)+$$

$$+\frac{1}{(m-1)\,!}\frac{1}{a_n^m}\int_0^{x_n}(x_n-t)^{m-1}\mathrm{f}\left(\frac{a_1}{a_n}(t-x_n)+x_1,\ldots,\frac{a_{n-1}}{a_n}(t-x_n)+x_{n-1},t\right)dt.$$

6. REZOLVAREA APROXIMATIVĂ A ECUAŢIEI $L_m(u)=\mathrm{f}$ (METODA GALERKIN)

Să considerăm ecuaţia

$$L_m(u(x,y))=\mathrm{f}\,(x,y),\ \mathrm{f}:D\subset\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}, \tag{43}$$

cu L_m definit ca în (25) şi să presupunem că se cere să se găsească soluţia ecuaţiei (43) cu condiţii la limită liniare şi omogene (adică dacă condiţia pe contur omogenă este satisfăcută de funcţiile u şi v, atunci şi combinaţia liniară $au+$

$+bv$, cu a, b constante, satisface condiţia la limită). Pentru a aproxima soluţia cerută vom folosi metoda Galerkin.

Fie f o funcţie continuă pe porţiuni pe $D \subset \mathbb{R}^2$ şi să presupunem că se caută o soluţie aproximativă de forma

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x, y) \tag{44}$$

în care a_k, $(k=1, 2, \ldots, n)$ sînt constante (de determinat), iar φ_k, $(k=1, \ldots, n)$ sînt funcţii alese astfel încît să satisfacă condiţiile la limită omogene. Cu toate că u_n satisface condiţiile la limită, ea nu satisface, în general ecuaţia (43). Funcţia

$$L_m(u(x, y)) - \mathrm{f}(x, y) = R_n(x, y),\ (x, y) \in D \tag{45}$$

poate fi privită ca funcţia erorilor.

Să presupunem că soluţia $u(x, y)$ poate fi reprezentată ca serie de funcţii liniar independente

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x, y) \tag{46}$$

Atunci $\{u_n(x, y)\}$ cu u_n dată de (44) reprezintă un şir de sume parţiale care aproximează soluţia $u(x, y)$. Impunem condiţia ca $L_m(u_n) - \mathrm{f}$ să fie ortogonală funcţiilor φ_k, $(k=1, \ldots, n)$:

$$\iint_D [L_m(u_n) - \mathrm{f}]\, \varphi_k \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0,\ k=1, 2, \ldots, n \tag{47}$$

sau

$$\iint_D R_n(x, y)\, \varphi_k(x, y) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0,\ k=1, 2, \ldots, n \tag{48}$$

Dacă (48) este valabilă cînd $n \to \infty$, urmează

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0 \tag{49}$$

Acest fapt poate fi stabilit considerînd o funcţie arbitrară $h(x, y)$ continuă şi satisfăcînd condiţiile la limită. În ipoteza că φ_k, $(k=1, 2, 3, \ldots)$ formează un sistem complet există constantele c_k, $(k=1, 2, 3, \ldots)$ astfel ca $h = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k$.

Atunci

$$\iint_D \lim_{n\to\infty} R_n(x, y)\, h(x, y) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

pentru h arbitrar, de unde se deduce că are loc (48).

Să presupunem acum că

$$L_m(u_n) \to L_m(u); \tag{50}$$

atunci, din (49) şi (50) rezultă că ecuaţia (43) este satisfăcută.

Metoda Galerkin impune ca funcţia $R_n(x, y)$ să verifice condiţiile (47). Ţinînd cont de (44) în (47) se obţin condiţiile

$$\iint_D \left[L_m\left(\sum_{j=1}^{n} a_j \varphi_j\right) - \mathrm{f} \right] \varphi_k \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0,\ \ k=1, 2, \ldots, n, \tag{51}$$

adică un sistem de n ecuaţii liniare cu necunoscutele $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Constantele a_j, $(j=1, 2, \ldots, n)$ determinate din (51) se introduc în (44) şi se obţine a n-a aproximaţie a soluţiei $u(x, y)$. Sistemul (51) este neomogen exceptînd cazul cînd f este ortogonală la toate funcţiile φ_k, $k=1, 2, \ldots, n$.

§3. ECUAŢIA COARDEI VIBRANTE

7. VIBRAŢIILE LIBERE ALE COARDEI INFINITE. METODA LUI D'ALEMBERT ŞI EULER. UNDE PROGRESIVE

Ecuaţia de tip hiperbolic:

$$\frac{\partial u^2}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial u^2}{\partial t^2}=0,$$

este numită de obicei ecuaţia omogenă a coardei vibrante sau ecuaţia micilor oscilaţii libere ale coardei (deşi ea are formă omoloagă cu ecuaţii ce descriu şi alte tipuri de oscilaţii pentru: bare, sisteme electrice, etc). Ea descrie fenomenul de oscilaţie al corzii în jurul poziţiei sale de echilibru (perfect întinsă), în următoarele condiţii:

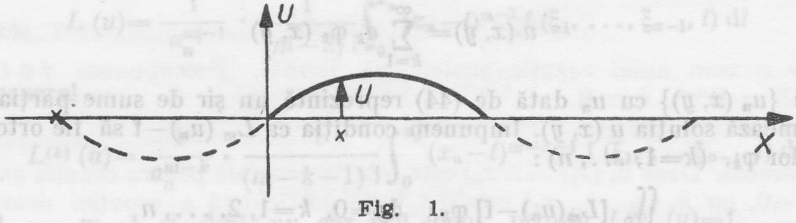

Fig. 1.

1) în fiecare punct M de abscisă x, la orice moment t, tensiunea în coardă păstrează o valoare constantă T_0.

2) coarda este un fir elastic flexibil, omogen, (densitatea ρ este constantă).

3) elongaţiile $u(x, t)$ sînt mici şi au loc în acelaşi plan (plan ce s-a ales ca plan de coordonate xOu).

4) Oscilaţiile sînt tot timpul transversale, adică perpendiculare pe poziţia de echilibru (Ox).

Semnificaţia constantei c^2 din ecuaţia coardei este dată de relaţia:

$$c^2=\frac{\rho}{T_0},$$

în condiţiile simplificatoare enumerate mai sus.

Coarda se consideră infinită, dacă lungimea ei este foarte mare în comparaţie cu elongaţiile maxime: de exemplu un fir de telegrafie foarte lung, etc.

Integrarea ecuaţiei omogene a coardei, înseamnă a-i determina unul din modurile posibile de vibraţie, descris de funcţia: $u(x, t)$, mod ce va fi bine determinat, numai dacă i se impun dinainte anumite condiţii iniţiale:

$$u(x, 0)=\mathrm{f}(x); \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\mathrm{g}(x).$$

Asta înseamnă că în timpul vibraţiei realizate prin modul pe care vrem să-l determinăm, vom cunoaşte în fiecare moment t, poziţia punctului de pe coardă de abscisă x, dacă la începutul mişcării ($t=0$) este dată poziţia fiecărui punct al corzii prin plasarea sa pe graficul funcţiei $u=\mathrm{f}(x)$, precum şi distribuţia vitezelor fiecărui punct al acestui grafic prin valorile funcţiei: $v=\mathrm{g}(x)$, vitezele fiind perpendiculare pe Ox.

Rezolvarea acestei probleme se face prin metoda schimbării variabilelor, sau metoda lui D'Alembert și Fourier.

Ea constă, în fapt, în folosirea funcțiilor caracteristice pentru aducerea ecuației la forma canonică, apoi din soluția generală, se deduce soluția particulară căutată prin impunerea condițiilor inițiale.

Vom atașa, deci, ecuația caracteristică:

$$\mu^2-\frac{1}{c^2}=0\ ;\ \text{cu}:\ \mu_{1,2}=\pm\frac{1}{c}\ ;\ \mu=\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x},$$

de unde obținem ecuațiile:

$$\mathrm{d}x-c\mathrm{d}t=0\ ;\ \mathrm{d}x+c\mathrm{d}t=0,$$

cu integralele prime:

$$x-ct=C_1\ ;\ x+ct=C_2.$$

Ținînd seama de caracterul liniar și omogen al ecuației coardei și fiind cu coeficienți constanți, va rezulta că transformarea:

$$(T)\begin{cases}\xi=x-ct\\ \eta=x+ct\end{cases}$$

va conduce la forma canonică:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0,$$

cu soluția generală:

$$u(\xi,\eta)=\Phi_1(\zeta)+\Phi_2(\eta),$$

sau:

$$u(x,t)=\Phi_1(x-ct)+\Phi_2(x+ct),$$

unde Φ_1 și Φ_2 sînt funcții arbitrare.

Interpretarea acestei soluții (generale) este următoarea: Cel mai general mod de vibrație liberă: $u(x,t)$ al coardei constă din suprapunerea a două unde de deplasare: $u_1(x,t)$ și $u_2(x,t)$, în lungul corzii, numite *unde progresive* a oricărei perturbații produse în poziția coardei, adică vom avea:

$$u(x,t)=u_1(x,t)+u_2(x,t)$$

Prima undă:

$$u_1(x,t)=\Phi_1(x-ct)$$

este numită *undă directă* și se propagă în sensul pozitiv al axei Ox cu viteza: $c=\sqrt{\frac{\rho}{T_0}}$, iar cealaltă undă:

$$u_2(x,t)=\Phi_2(x+ct)$$

este numită *unda inversă* și se propagă în sens contrar cu aceeași viteză.

În momentul producerii perturbației aceste două unde sînt suprapuse, apoi încep să se separe, iar după separarea lor completă punctele coardei de pe porţiunea separată, reintră în poziţie de repaus. La fel şi punctele îndepărtate de locul perturbaţiei iniţiale rămîn în repaus pînă le atinge una din cele două unde progresive, apoi vibraţia lor durează atît timp cît trece unda peste ele, rămînînd apoi din nou în repaus.

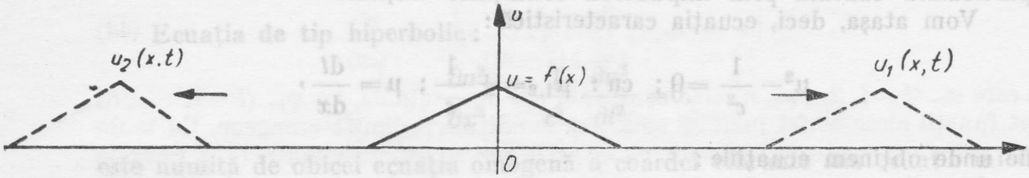

Fig. 2.

Condiţiile iniţiale, determinînd un anumit mod de vibraţie unic, vor defini forma grafică a undei de propagare şi vitezele de oscilaţie transversală a punctelor peste care trece unda.

Impunînd aceste condiţii vom avea:

$$\begin{cases} u(x,0)\equiv f(x) \Leftrightarrow \Phi_1(x-ct)\Big|_{t=0} + \Phi_2(x+ct)\Big|_{t=0} \equiv f(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} \equiv g(x) \Leftrightarrow -c\dfrac{d\Phi_1}{d\xi}\Big|_{t=0} + c\dfrac{d\Phi_2}{d\eta}\Big|_{t=0} \equiv g(x), \end{cases}$$

sau, ţinînd seamă că pentru $t=0$, variabilele $\xi=x-ct$ şi $\eta=x+ct$ se reduc la x:

$$\begin{cases} \Phi_1(x)+\Phi_2(x)\equiv f(x) \\ -c\Phi_1'(x)+c\Phi_2'(x)\equiv g(x), \end{cases}$$

care în urma integrării, membru cu membru, a celei de a doua identităţi se va scrie:

$$\begin{cases} \Phi_1(x)+\Phi_2(x)\equiv f(x) \\ -\Phi_1(x)+\Phi_2(x)\equiv \dfrac{1}{c}\displaystyle\int_{x_0}^{x} g(s)\,ds \end{cases}$$

Rezolvarea acestui sistem, ne permite deducerea celor două funcţii: Φ_1 şi Φ_2 care în soluţia generală erau complet arbitrare:

$$\begin{cases} \Phi_1=\dfrac{1}{2}\left[f(x)-\dfrac{1}{c}\displaystyle\int_{x_0}^{x} g(s)\,ds\right] \\ \Phi_2=\dfrac{1}{2}\left[f(x)+\dfrac{1}{c}\displaystyle\int_{x_0}^{x} g(s)\,ds\right], \end{cases}$$

de unde obţinem:

$$\begin{cases} \Phi_1(x-ct)=\dfrac{1}{2}\left[f(x-ct)-\dfrac{1}{c}\displaystyle\int_{x_0}^{x-ct} g(s)\,ds\right] \\ \Phi_2(x+ct)=\dfrac{1}{2}\left[f(x+ct)+\dfrac{1}{c}\displaystyle\int_{x_0}^{x+ct} g(s)\,ds\right], \end{cases}$$

Iar soluția căutată va fi:

$$u(x, t)=\frac{f(x-ct)+f(x+ct)}{2}+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\, ds.$$

Această soluție, se vede din modul cum a fost dedusă, că este unică și se poate verifica printr-un calcul direct că verifică într-adevăr condițiile inițiale date.

Exemplu: Dacă avem:

$$\begin{cases} g(x)\equiv 0 \\ f(x)\equiv \begin{cases} |x-a|\,; & x\in[-l, l] \\ 0\,; & x\notin[-l, l], \end{cases} \end{cases}$$

atunci:

$$u(x, t)=\frac{1}{2} f(x-ct)+\frac{1}{2} f(x+ct),$$

unde:

$$f(x-ct)=\begin{cases} |x-ct-a|\,; & x\in[ct-l,\ ct+l] \\ 0\,; & x\notin[ct-l,\ ct+l] \end{cases}$$

și:

$$f(x+ct)=\begin{cases} |x+ct-a|\,; & x\in[-ct-l,\ -ct+l] \\ 0\,; & x\notin[-ct-l,\ -ct+l], \end{cases}$$

deplasarea undei rezultînd din faptul că intervalul în care nu se anulează depinde de timp.

8. VIBRAȚIILE LIBERE ALE COARDEI FIXATĂ LA CAPETE. METODA SEPARĂRII VARIABILELOR A LUI BERNOULLI-FOURIER. UNDE STAȚIONARE

Ne propunem să determinăm acea soluție particulară a ecuației coardei, care verifică:

a) condițiile la limită:

$$u(0, t)=0\,;\ u(l, t)=0\,;\ \text{oricare ar fi } t\in \mathbf{R}_+$$

b) condițiile inițiale:

$$u(x, 0)\equiv f(x)\,;\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}\equiv g(x)\,;\ \text{oricare ar fi } x\in[0, l]$$

și avînd în plus:

$$f(0)=f(l)=0 \text{ și } g(0)=g(l)=0,$$

deoarece se consideră coarda fixată la capete.

Fiind vorba, tot despre vibrațiile libere ale corzii, ecuația este omogenă:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0.$$

După cum arată și numele metodei, vom căuta, inițial, soluții de forma:

$$u(x, t)=X(x)\cdot T(t).$$

Vom avea atunci:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=X''(x)\cdot T(t)\,;\quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=X(t)\cdot T''(t)$$

și va trebui să avem, în mod identic:

$$X''(x)\cdot T(t)=\frac{1}{c^2}X(x)\,T''(t),\ \text{oricare ar fi } x\in[0, l]\,;$$

$$\text{oricare ar fi } t\in \mathbf{R}_+$$

relație care se mai scrie:

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{1}{c^2}\,\frac{T''(t)}{T(t)}=k,$$

unde k nu poate fi decît o constantă, deoarece ea trebuie să fie egală cu valoarea unei funcții numai de x, pe de o parte și simultan cu a unei funcții numai de t, pe de altă parte, unde variabilele x și t sînt independente între ele.

Din egalarea fiecăruia din cele două rapoarte cu constanta k, deducem că $X(x)$ și $T(t)$ trebuie să fie soluții, respectiv, ale următoarelor ecuații diferențiale ordinare de ordinul doi:

$$1)\ X''(x)-kX(x)=0,\ \text{respectiv},\ 2)\ T''(t)-c^2kT(t)=0$$

— Vom considera mai întîi prima ecuație și-i vom căuta soluția $X(x)$, cu condițiile bilocale: $X(0)=X(l)=0$, condiții ce rezultă din condițiile la limită impuse funcției $u(x, t)$.

Într-adevăr, avem:

$$u(0, t)\equiv 0 \Leftrightarrow X(0)\,T(t)\equiv 0\,;\ \text{oricare ar fi } t\in\mathbf{R}_+ \Rightarrow X(0)=0.$$

$$u(l, t)\equiv 0 \Leftrightarrow X(l)\,T(t)\equiv 0\,;\ \text{oricare ar fi } t\in\mathbf{R}_+ \Rightarrow X(l)=0.$$

Rămîne, deci, de integrat ecuația:

$$X''(x)-kX(x)=0,\ \text{cu}:\ X(0)=0\,;\ X(l)=0.$$

Ecuația ei caracteristică fiind:

$$r^2-k=0,\ \text{cu rădăcinile}:\ r_1=\sqrt{k}\,;\ r_2=-\sqrt{k},$$

avem de analizat următoarele situații posibile:

Cazul I: $k>0$. Atunci rădăcinile fiind reale și distincte, soluția se va scrie sub forma:

$$X(x)=C_1e^{x\sqrt{k}}+C_2\,e^{-x\sqrt{k}},$$

căreia impunîndu-i condițiile inițiale, obținem pentru determinarea constantelor C_1 și C_2, următorul sistem liniar și omogen:

$$\begin{cases} C_1+C_2=0 \\ -e^{l\sqrt{k}}C_1+e^{-l\sqrt{k}}C_2=0 \end{cases}$$

cu determinantul:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{l\sqrt{k}} & e^{-l\sqrt{k}} \end{vmatrix}=-2\mathrm{sh}\,(l\sqrt{k})\neq 0,$$

deci admițînd, doar soluția banală: $C_1=C_2=0$, care nu convine deoarece atrage după sine: $X(x)\equiv 0$ și apoi $u(x,t)\equiv 0$, ceea ce ar însemna ca toate punctele coardei să rămînă tot timpul nemișcate adică, în acest caz coarda n-ar executa nici un fel de vibrații, ceea ce contrazice condițiile inițiale.

Cazul II: $k=0$. Evident ecuația diferențială se reduce la:

$$X''(x)=0,$$

cu soluția generală: $X(x)=C_1x+C_2$ si vom avea:

$$\begin{cases} X(0)=0 \\ X(l)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2=0 \\ C_1l+C_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1=0 \\ C_2=0 \end{cases} \Rightarrow X(x)\equiv 0,$$

deci nici în acest caz coarda n-ar executa vibrații.

Cazul III. $k<0$. În acest caz, punînd:

$$k=-\nu^2,\ (\text{cu}: \nu=\sqrt{|k|}),$$

ecuația diferențială va fi:

$$X''(x)+\nu^2X(x)=0,$$

cu ecuația caracteristică:

$$r^2+\nu^2=0,\ \text{și}: r_1=e^{i\nu};\ r_2=e^{-i\nu},$$

de unde:

$$X(x)=C_1\cos\nu x+C_2\sin\nu x,$$

iar, condițiile la limită, dau:

$$\begin{cases} X(0)=0 \\ X(l)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1=0 \\ C_1\cos\nu l+C_2\sin\nu l=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1=0 \\ C_2\sin\nu l=0 \end{cases}$$

Deoarece nu putem accepta, după cum am văzut la celelalte două cazuri, valoarea $C_1=0$, vom alege $C_2=1$, iar în schimb va trebui să avem:

$$\sin\nu l=0 \Rightarrow \nu l=n\pi \Rightarrow \nu_n=\frac{n\pi}{l};\ n=1,2,\ldots$$

Vom avea atunci pentru k valorile:

$$k_n = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$$

numite valorile proprii (sau valorile spectrale, sau valorile caracteristice) ale problemei puse, iar mulţimea acestor valori poartă numele de spectrul acestei probleme. În cazul nostru acest spectru:

$$\Lambda = \{k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots\}$$

este un spectru discret şi infinit, deoarece elementele sale sînt puse în corespondenţă biunivocă cu mulţimea $\mathbf{N}$ a numerelor naturale, deci formează un şir infinit.

La fiecare valoare k_n va corespunde atunci cîte o funcţie:

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi}{l}x,$$

mulţimea lor formînd, de asemenea un şir infinit. Aceste funcţii $X_n(x)$ se numesc funcţii proprii (sau funcţii caracteristice) ale problemei.

Revenind la soluţia căutată $u(x, t)$, ea va putea să fie oricare din funcţiile şirului:

$$u_n(x, t) = T_n(t) X_n(x) = T_n(t) \sin\frac{n\pi}{l}x,$$

deoarece $T_n(t)$ vor fi deduse tot ca funcţii proprii cu valorile k_n determinate mai sus din cea de-a doua ecuaţie diferenţială, care devine:

$$T''(t) + \left(\frac{cn\pi}{l}\right)^2 T(t) = 0,$$

cu soluţia generală:

$$T_n(t) = A_n \cos\frac{n\pi c}{l}t + B_n \sin\frac{n\pi c}{l}t.$$

Vibraţiile proprii armonice ale coardei care verifică fiecare în parte condiţiile la limită impuse vor fi:

$$u_n(x, t) = \left(A_n \cos\frac{n\pi c}{l}t + B_n \sin\frac{n\pi c}{l}t\right) \sin\frac{n\pi}{l}x,$$

care, pe motivul că se anulează în punctele 0 şi l, se numesc *unde staţionare*.

Se observă, imediat, că verificarea condiţiilor iniţiale nu va putea fi, în general, făcută de nici una din vibraţiile proprii, decît în cazuri cu totul particulare cînd funcţiile f (x) şi g (x) sînt date şi ele armonice şi convenabil alese, deoarece:

$$u_n(x, 0) \equiv \mathrm{f}(x) \Leftrightarrow A_n \sin\frac{n\pi}{l}x \equiv \mathrm{f}(x)$$

$$\left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right)_{t=0} \equiv \mathrm{g}(x) \Leftrightarrow \frac{n\pi c}{l} B_n \sin\frac{n\pi}{l}x \equiv \mathrm{g}(x),$$

ceea ce este imposibil, decît în condiţiile expuse mai sus.

Folosind, însă, proprietatea de liniaritate a ecuaţiei omogene a coardei, deducem că suma a două sau mai multe soluţii ale ei formează tot o soluţie, după cum urmează: $u_m(x, t)$ şi $u_p(x, t)$ fiind două soluţii oarecare, avem:

$$\frac{\partial^2 (u_m+u_p)}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 (u_m+u_p)}{\partial t^2}=\left[\frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2}\right]+\left[\frac{\partial^2 u_p}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u_p}{\partial t^2}\right]=0,$$

deoarece fiecare paranteză are valoarea zero, din faptul că u_m şi u_p verifică fiecare separat ecuaţia coardei.

Vom forma atunci mulţimea tuturor soluţiilor ce reprezintă vibraţiile libere posibile, care verifică condiţiile la limită, prin însumarea tuturor vibraţiilor proprii $u_n(x, t)$, formînd seria cu coeficienţi nedeterminaţi A_n şi B_n:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi c}{l}t+B_n\sin\frac{n\pi c}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

Determinarea acestor coeficienţi va rezulta în urma impunerii condiţiilor iniţiale funcţiei $u(x, t)$ definită de seria de mai sus, iar seria cu aceşti coeficienţi astfel determinaţi, va defini soluţia cerută de problemă.

Va trebui să avem:

$$u(x, t)\equiv \mathrm{f}(x) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{l}\equiv \mathrm{f}(x).$$

Ultima identitate însemnînd faptul că seria din membrul stîng trebuie să coincidă identic cu seria de sinuşi a funcţiei $f(x)$, pe intervalul $(0, l)$, serie care reprezintă pe $\mathbf{R}$ o funcţie ce se obţine din $\mathrm{f}(x)$ prin prelungire prin imparitate pe $(-l, l)$ şi apoi, repetarea periodică de perioadă $T=2l$.

Identificarea celor două serii făcîndu-se termen cu termen, rezultă că A_n vor coincide cu coeficienţii seriei de sinuşi pentru $f(x)$, adică:

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l \mathrm{f}(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x;\ n=1, 2, \ldots$$

În continuare avem:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi c}{l}\left(-A_n\sin\frac{n\pi c}{l}t+B_n\cos\frac{n\pi c}{l}t\right)\sin\frac{n\pi x}{l},$$

iar pentru cea de-a doua condiţie iniţială, avem:

$$\left.\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right|_{t=0}\equiv \mathrm{g}(x)\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi c}{l}B_n\sin\frac{n\pi x}{l}\equiv \mathrm{g}(x),$$

de unde rezultă că va trebui să identificăm din nou două serii trigonometrice de sinuşi, analog ca mai sus, deci va trebui să avem:

$$\frac{n\pi c}{l}B_n=\frac{2}{l}\int_0^l \mathrm{g}(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x$$

adică:

$$B_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^l g(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

Cu acești coeficienți A_n și B_n, astfel calculați, soluția problemei va fi dată de seria trigonometrică dublă a funcției $u(x, t)$, care se mai poate scrie:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n \left|\sin\frac{n\pi x}{l}\right| \left(\sin\varphi_n \cos\frac{n\pi c}{l}t + \cos\varphi_n \sin\frac{n\pi c}{l}t\right)$$

unde:

$$\tau_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}\,;\ \sin\varphi_n = \frac{A_n}{\pm\tau_n}\,;\ \cos\varphi_n = \frac{B_n}{\pm\tau_n},$$

cu semnul din față a lui τ_n ales același cu semnul lui $\sin\frac{n\pi x}{l}$, iar soluția se va scrie:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n(x)\sin\left(\frac{n\pi c}{l}t + \varphi_n\right),$$

avînd: $\sigma_n(x) = \tau_n\left|\sin\frac{n\pi x}{l}\right|$,

reprezentînd amplitudinile armonicilor vibrațiilor punctelor corzii care au abscisa x, iar φ_n fiind faza la momentul inițial, aceeași pentru armonica respectivă în toate punctele corzii situate într-o semiperioadă (de exemplu în $(0, l)$).

Tonul fundamental al sunetului produs de vibrația corzii e dat, după cum se știe de armonica de ordinul întîi $u_1(x, t)$, iar celelalte armonici superioare contribuie la determinarea timbrului sunetului.

9. VIBRAȚIILE ÎNTREȚINUTE ALE COARDEI

Coarda execută oscilații întreținute sau forțate, atunci cînd nu este lăsată să vibreze liber ci există o forță $\varphi(x, t)$ care acționează în fiecare punct al său și la orice moment, forțînd-o să vibreze continuu.

Ecuația coardei va fi în acest caz neomogenă:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \varphi(x, t).$$

Căutînd și în acest caz soluția care verifică condițiile la limită:

$$u(0, t) \equiv 0\,;\ u(l, t) \equiv 0$$

și cele inițiale:

$$u(x, 0) \equiv f(x)\,;\ \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} \equiv g(x),$$

vom descompune problema în două probleme mai simple, adică vom căuta soluția $u(x, t)$ ca sumă de două funcții: $v(x, t)$ și $u_0(x, t)$, luînd $v(x, t)$ ca soluţie a ecuaţiei omogene a coardei şi satisfăcînd aceleaşi condiţii la limită şi iniţiale ca şi $u(x, t)$ iar pe $u_0(x, t)$ alegîndu-l ca soluţie a ecuaţiei neomogene dar cu condiţiile iniţiale şi la limită toate nule, adică:

$$u(x, t)=v(x, t)+u_0(x, t),$$

avînd:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=0,$$

cu:

$$\begin{cases} v(0, t)\equiv 0 \\ v(l, t)\equiv 0 \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} v(x, 0)\equiv \mathrm{f}(x) \\ \left(\dfrac{\partial v}{\partial t}\right)_{t=0}\equiv \mathrm{g}(x) \end{cases}$$

şi deasemenea:

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}=\varphi(x, t),$$

cu:

$$\begin{cases} u_0(0, t)=0 \\ u_0(l, t)=0 \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} u_0(x, 0)\equiv 0 \\ \left(\dfrac{\partial u_0}{\partial t}\right)_{t=0}\equiv 0. \end{cases}$$

Într-adevăr soluţia $u(x, t)$ astfel construită va fi soluţia căutată, deoarece avem:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial u^2}{\partial t^2}\equiv\varphi(t)\Leftrightarrow\frac{\partial^2(v+u_0)}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2(v+u_0)}{\partial t^2}\equiv\varphi(x, t)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right]+\left[\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}-\varphi(x, t)\right]\equiv 0,$$

identitate adevărată, deoarece parantezele sînt identic nule, ţinînd seama de alegerea lui $v(x, t)$ şi $u_0(x, t)$.

Deasemenea:

$$\begin{cases} u(0, t)\equiv 0 \\ u(l, t)\equiv 0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} v(0, t)+u_0(0, t)\equiv 0 \\ v(l, t)+u_0(l, t)\equiv 0, \end{cases}$$

care, la fel sînt identic verificate, pentru că atît $v(x, t)$ cît şi $u_0(x, t)$ verifică la limită condiţii nule, iar:

$$\begin{cases} u(x, 0)\equiv \mathrm{f}(x) \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0}\equiv \mathrm{g}(x) \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} v(x, 0)+u_0(x, 0)-\mathrm{f}(x)\equiv 0 \\ \left(\dfrac{\partial v}{\partial t}\right)_{t=0}+\left(\dfrac{\partial u_0}{\partial t}\right)_{t=0}-\mathrm{g}(x)\equiv 0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 0+\mathrm{f}(x)-\mathrm{f}(x)\equiv 0 \\ 0+\mathrm{g}(x)-\mathrm{g}(x)\equiv 0 \end{cases}$$

Rămîne deci de găsit cele două funcţii: $v(x)$ şi $u_0(x)$.

Se observă că $v(x, t)$ este aceeași cu soluția dată la punctul precedent prin metoda Fourier-Bernoulli a separării variabilelor :

$$v(x, t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{n\pi c}{l}t+B_n \sin\frac{n\pi c}{l}t\right)\sin\frac{n\pi x}{l},$$

cu :

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l \mathrm{f}(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x\,;\; B_n=\frac{2}{n\pi c}\int_0^l \mathrm{g}(x)\sin\frac{n\pi x}{l},\; n=1, 2, \ldots$$

Pentru aflarea soluției particulare $u_0(x, t)$, vom apela tot la metoda separării variabilelor, luînd :

$$u_0(x, t)=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

care verifică condițiile la limită, deoarece pentru $x=0$ și $x=l$ se anulează fiecare termen al seriei.

Cunoașterea lui $u_0(x, t)$, cere însă determinarea șirului de funcții $T_n(t)$, care se poate face obligînd seria lui $u_0(x, t)$ de mai sus să verifice ecuația neomogenă a coardei și condițiile inițiale, adică să avem :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n(t)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\sin\frac{n\pi}{l}x\right)-\frac{1}{c^2}T_u''(t)\sin\frac{n\pi}{l}x\right]\equiv \mathrm{f}(x)$$

sau :

$$-\frac{1}{c^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n''(t)+\left(\frac{n\pi c}{l}\right)^2 T_n(t)\right]\sin\frac{n\pi x}{l}\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

unde seria din dreapta este seria Fourier a funcției $\varphi(x, t)$ ca serie numai de sinuși în x, în timpul dezvoltării, menținîndu-l pe t constant, de unde rezultă coeficienții b_n ca funcții de t cunoscute din :

$$b_n=\varphi_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x, t)\sin\frac{\pi x}{l}\,\mathrm{d}x.$$

Din identificarea celor două serii trigonometrice termen cu termen, rezultă :

$$T_n''(t)+\left(\frac{n\pi c}{l}\right)^2 T_n(t)=-c^2\varphi_n(t)\,;\; n=1, 2, \ldots$$

de unde pentru fiecare n se va deduce $T_n(t)$ ca soluție dată de condițiile inițiale : $T_n(0)=T_n'(0)=0$, rezultate din :

$$\begin{cases} u_0(x, 0)\equiv 0 \\ \left.\dfrac{\partial u_0}{\partial t}\right|_{t=0}\equiv 0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)\sin\frac{n\pi}{l}x\equiv 0 \text{ oricare ar fi } x\Rightarrow T_n(0)=T_n''(0)=0 \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}T_n''(0)\sin\frac{n\pi x}{l}\equiv 0 \end{cases}$$

Determinarea efectivă a funcției $T_n(t)$ cu condițiile inițiale de mai sus depinde de forma concretă a funcțiilor $\varphi_n(t)$ din membrul doi, iar pe urmă odată găsite se introduc în expresia seriei ce defineşte pe $u_0(x, t)$, iar soluţia care dă oscilaţiile forţate va fi:

$$u(x, t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n \cos\frac{n\pi c}{l}t+B_n \sin\frac{n\pi c}{l}t+T_n(t)\right]\sin\frac{n\pi x}{l},$$

unde se cunosc, conform celor spuse mai sus valorile: A_n, B_n şi $T_n(t)$.

Se observă că de data aceasta, vibraţiile nu se mai obţin ca suprapunere de vibraţii armonice, pentru un punct x oarecare, deoarece peste o astfel de vibraţie se suprapune de fiecare dată o vibraţie dată de termenul perturbator $T_n(t)$.

§.4. ECUAŢIA CĂLDURII

În ipoteza că într-o anumită regiune din spaţiu temperatura nu este constantă, asistăm la fenomenul deplasării unor fluxuri de căldură de la punctele cu temperatură mai înaltă către cele cu temperatură mai scăzută, fenomen care poartă numele de propagarea căldurii.

Modelarea matematică a acestui fenomen se realizează cu suficientă precizie, în unele condiţii de omogenitate şi izotropie, de următoarea ecuaţie cu derivate parţiale de tip parabolic:

$$\Delta u=\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t}+\mathrm{f}(x, y, z, t),$$

unde Δ este operatorul lui Laplace, iar:

$$a^2=\frac{k}{\rho c},$$

k fiind coeficientul de conductibilitate termică a mediului, c — căldura sa specifică, iar ρ densitatea.

Termenul liber $\mathrm{f}(x, y, z, t)$ reprezintă densitatea surselor de căldură în fiecare punct $M(x, y, z)$ al mediului, la un moment oarecare t.

Dacă $\mathrm{f}(x, y, z, t)=0$ în domeniul considerat, are loc fenomenul de răcire a materialului plasat în domeniul respectiv, pînă la o uniformizare a temperaturii la o valoare constantă, dacă domeniul respectiv este izolat termic de exteriorul său. În acest caz fenomenul de răcire este descris (modelat) de ecuaţia:

$$\Delta u=\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t}.$$

Alteori, datorită acţiunii prelungite a unor influenţe exterioare constante asupra frontierei corpului, considerat ca domeniu de studiu, se stabileşte o stare termică de temperatură ce rămîne constantă în timp în fiecare punct din interior, dar care diferă de la un punct la altul. Se spune în acest caz că în interiorul corpului s-a creat un *regim staţionar* de temperatură. El va fi descris de ecuaţia:

$$\Delta u=\mathrm{f}(x, y, z),$$

iar dacă în interior nu există surse de căldură, regimul staţionar va fi descris de ecuaţia lui Laplace:

$$\Delta u=0.$$

Observăm că, datorită invarianței în timp a temperaturii, în regimul staționar avem $\frac{\partial u}{\partial t}=0$.

Cunoașterea modului de propagare a căldurii sau a modului de distribuție a temperaturilor din interiorul unui domeniu, fie în orice moment, în cazul unui regim tranzitoriu, fie pe o perioadă dată cît durează un regim staționar, revine la integrarea ecuației corespunzătoare a căldurii cu condiții inițiale date, în interior, și condiții de frontieră date la exterior, ambele puse corect, pentru a se racorda valorile limită ale condițiilor inițiale cînd ne apropiem de punctele frontieră ; cu alte cuvinte să avem de rezolvat o problemă *„bine pusă"*, deci una care să aibă soluție și să fie unică.

Deci, în general, o soluție unică a ecuației căldurii, cere rezolvarea ecuației

$$\Delta u=\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t}+f(x, y, z, t)$$

cu condiția inițială :

$$u(x, y, z, 0)=\varphi(x, y, z),$$

și condițiile de margine (frontieră) :

$$u\,|_S=\psi\underset{P\in S}{(P, t)}\,;\left(\text{sau}: \alpha u(P, t)\Big|_{S}+\beta\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{S}=\psi_1(P, t)\right).$$

Vom trata, ca exemple, cazul de propagare a căldurii printr-o bară subțire unidimensională și regimul staționar într-o bară cilindrică de grosime dată.

10. PROPAGAREA CĂLDURII PRINTR-O BARĂ RECTILINIE

Este cazul cînd domeniul în care trebuie studiată variația regimului termic, este redus la un segment de dreaptă, la o semidreaptă, sau la o dreaptă după cum bara (considerată de grosime neglijabilă, sau cu temperatura constantă într-o secțiune perpendiculară pe axa sa), este considerată finită, infinită într-un sens, sau infinită în ambele sensuri.

În ipoteza că între suprafața barei și mediul înconjurător nu există schimb de căldură (evident nici surse de căldură în interior : $f(x, t)\equiv 0$) funcția $u(x, t)$ care ne dă valoarea temperaturii la orice moment t, în orice punct x al barei (Ox fiind luată în lungul barei) trebuie căutată ca soluție a ecuației :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t},$$

(deoarece în acest caz Laplace-ianul Δu se reduce la $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ în fiecare punct M al barei) cu o condiție inițială și condiții date la capete (sau numai la un capăt, cînd e nemărginită numai într-un sens) sau fără condiții inițiale cînd bara este suficient de lungă încît, să se poată considera infinită în ambele sensuri Aceste condiții de margine pot cere de exemplu ca : la fiecare capăt temperatura să fie menținută la cîte o valoare constantă sau la fiecare capăt (evident de la distanță finită) să fie dat un regim de variație în timp a temperaturii :

$$\begin{cases} u(0, t) = f_1(t) \\ u(l, t) = f_2(t). \end{cases}$$

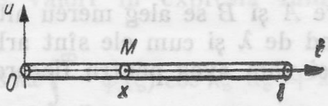

Fig. 3.

— Vom soluționa cazul barei infinite în ambele sensuri, adică vom urmări modul de răcire a unei bare foarte lungi în ambele sensuri, cînd la momentul inițial se cunoaște distribuția de temperatură în fiecare punct al ei.

Avem deci de rezolvat problema integrării ecuației :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t}, \text{ cu : } u(x, 0) = \varphi(x) \text{ ; } x \in \mathbf{R}.$$

În acest scop vom aplica metoda separării variabilelor, luînd :

$$u(x, t) = X(x)\, T(x),$$

care, verificîndu-și ecuația dată, ne dă:

$$X''(x)\, T(t) = \frac{1}{a^2} X(x)\, T'(t),$$

sau

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T'(t)}{T} = k,$$

k fiind o constantă, deoarece x și t sînt variabile independente.

Vom avea de integrat ecuațiile :

$$X''(x) - kX(x) = 0 \text{ și } T'(t) - ka^2T(t) = 0.$$

Începem cu integrarea celei de a doua ecuații, care fiind de ordinul întîi liniară, omogenă și cu coeficienți constanți, ne dă :

$$T(t) = Ce^{ka^2t} \text{ ; } (C = \text{constantă arbitrară})$$

și ne permite precizarea valorilor posibile pentru k.

Avînd, deocamdată :

$$u(x, t) = C\, X(x)\, e^{ka^2t},$$

rezultă imediat că nu putem avea decît cazul $k < 0$, deoarece pentru $k > 0$, ar rezulta pentru $C \neq 0$, că în fiecare punct al barei temperatura ar crește în valoare absolută peste orice limite, iar pentru $k = 0$, această temperatură ar păstra în fiecare punct o valoare ce ar depinde numai de acel punct și independentă de timp, adică am avea :

$$u(x, t) = C \cdot X(x).$$

Nu putem accepta nici anularea constantei C, deoarece, atunci am avea temperatura nulă în toată bara în orice moment, ceea ce contrazice condiția inițială dată. Așa că vom putea face notația : $k=-\lambda^2$, cu $\lambda>0$ și atunci ecuația diferențială verificată de $X(x)$, devine :

$$X''(x)+\lambda^2 X(x)=0,$$

cu soluția generală :

$$X(x)=A(\lambda)\cos\lambda x+B(\lambda)\sin\lambda x,$$

în care constantele de integrare A și B se aleg mereu altele la fiecare valoare nouă dată lui λ, deci ele depind de λ și cum ele sînt arbitrare, putem lua în expresia lui $T(t)$ pe $C=1$, deci vom avea pentru fiecare $\lambda>0$, cîte o undă de temperatură

$$u(x,t;\lambda)=[A(\lambda)\cos\lambda x+B(\lambda)\sin\lambda x]e^{-\lambda^2a^2t},$$

unde funcțiile : $u(x,t;\lambda)$ sînt funcțiile proprii, corespunzătoare valorilor proprii λ, care de data aceasta formează un spectru continuu :

$$\Lambda=(0,\infty).$$

Evident, în general, nici una din aceste unde nu constituie soluția căutată a problemei, deoarece ar trebui să avem la momentul inițial :

$$A(\lambda)\cos\lambda x+B(\lambda)\sin\lambda x\equiv\varphi(x)\ ;\ \text{oricare ar fi } x\in\mathbf{R}$$

ceea ce ar fi posibil, doar în cazul particular cînd $\varphi(x)$ s-ar fi dat sinusoidală.

Din această cauză, vom construi mai întîi cea mai generală soluție a problemei noastre prin suprapunerea tuturor undelor proprii, adică :

$$u(x,t)=\int_0^\infty u(x,t;\lambda)\,d\lambda,$$

unde, pentru a le suprapune pe toate, fără excepție, locul seriei de însumare după valorile spectrului, în cazul discret, l-a luat integrarea în raport cu parametrul λ ce descrie spectrul continuu.

Vom avea deci :

$$u(x,t)=\int_0^\infty[A(\lambda)\cos\lambda x+B(\lambda)\sin\lambda x]\,e^{-\lambda^2a^2t}\,d\lambda,$$

iar condiția inițială cere verificarea identității :

$$\int_0^\infty[A(\lambda)\cos\lambda x+B(\lambda)\sin\lambda x]\,d\lambda\equiv\varphi(x);$$

oricare ar fi $x\in\mathbf{R}$.

Din această identificare, vom putea deduce valorile funcțiilor : $A(\lambda)$ și $B(\lambda)$, în ipoteza că funcția dată $\varphi(x)$ admite o reprezentare integrală sub formă de integrală Fourier, adică să putem scrie :

$$\varphi(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\lambda\int_{-\infty}^\infty\varphi(\zeta)\cos\lambda(x-\zeta)\,d\zeta$$

caz în care identitatea de mai sus devine :

$$\int_0^\infty[A(\lambda)\cos\lambda x+B(\lambda)\sin\lambda x]\,d\lambda\equiv\int_0^\infty\left[\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty\varphi(\zeta)\cos\lambda\zeta\,d\zeta\right)\cos\lambda x+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty\varphi(\zeta)\sin\lambda\zeta\,d\zeta\right)\sin\lambda x\right]d\lambda$$

de unde deducem:

$$A(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\zeta)\cos\lambda\zeta\,d\zeta\ ;\quad B(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\zeta)\sin\lambda\zeta\,d\zeta.$$

Înlocuind aceste valori în expresia funcţiei proprii $u(x, t\ ;\ \lambda)$ avem:

$$u(x, t\ ;\ \lambda)=\frac{1}{\pi}\left[\cos\lambda x\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\zeta)\cos\lambda\zeta\,d\zeta+\sin\lambda x\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\zeta)\sin\lambda\zeta d\zeta\right]e^{-\lambda^2a^2t}$$

sau, introducînd totul sub aceeaşi integrală:

$$u(x, t\ ;\ \lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\zeta)\,e^{-\lambda^2a^2t}\cos\lambda(x-\zeta)\,d\zeta.$$

Cu aceasta, soluţia căutată va fi:

$$u(x, t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\zeta)\,e^{-\lambda^2a^2t}\cos\lambda(x-\zeta)\,d\zeta,$$

sau, după schimbarea ordinii de integrare:

$$u(x, t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_0^{\infty}e^{-a^2\lambda^2t}\cos(x-\zeta)\lambda\,d\lambda\right]\varphi(\zeta)\,d\zeta.$$

Integrala din paranteza dreaptă, se poate calcula efectiv, fiind o integrală de tip Poisson, adică de forma:

$$I=\int_0^{\infty}e^{-\alpha x^2}\cos\beta x dx\ ;\ \alpha>0,$$

care se calculează de obicei cu ajutorul rezidurilor, folosind conturul din figura de mai jos, pentru integrala:

$$J=2I=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha x^2}\cos bx\,dx,$$

făcînd: $R\to\infty$ şi deducînd, în final:

$$I=\int_0^{\infty}e^{-\alpha x^2}\cos\beta x dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}.$$

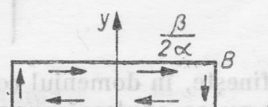

Fig. 4.

Pentru integrala noastră avem: $\alpha=a^2t$; $\beta=x-\zeta$, deci vom obţine:

$$\int_0^{\infty}e^{-a^2t\lambda^2}\cos(x-\zeta)\lambda d\lambda=\frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\,e^{-\frac{(x-\zeta)^2}{4a^2t}},$$

adică regimul termic de răcire al barei va fi descris, în condiţia iniţială dată de funcţia $\varphi(x)$, de către:

$$u(x, t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\zeta)e^{-\frac{(x-\zeta)^2}{4a^2t}}\,d\zeta\ ;\ t>0.$$

Acest rezultat poate fi generalizat uşor la cazul bidimensional, adică la studiul regimului de răcire a unei plăci foarte întinse, care să poată fi considerată, infinită, acoperind planul xOy și avînd grosime neglijabilă în condiții de izolare termică față de exterior.

În acest caz avem ecuația:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t}\,;\ \text{cu}:\ u\,(x,\,y,\,0)\equiv\varphi\,(x,\,y),$$

cînd soluția va fi:

$$u\,(x,\,y,\,t)=\frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi\,(\zeta,\,\eta)\,e^{-\frac{(x-\zeta)^2+(y-\eta)^2}{4a^2t}}\,d\zeta d\eta.$$

De asemenea regimul de răcire a unui corp tridimensional, de dimensiuni mari, care pentru problema respectivă poate fi confundat cu întregul spațiu $\mathbf{R}^3$, este descris de ecuația:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t}\,;\ \text{cu}:\ u\,(x,\,y,\,z,\,0)=\varphi\,(x,\,y,\,z).$$

§.5. OPERATORI DIFERENȚIALI ÎN COORDONATE CURBILINII

11. REPERUL MOBIL AL COORDONATELOR CURBILINII. PARAMETRII LUI LAMÉ

După cum se știe din geometria analitică și diferențială, orice transformare punctuală nedegenerată:

$$(T)\ \begin{cases} x=x\,(x_1,\ x_2,\ x_3)\\ y=y\,(x_1,\ x_2,\ x_3)\,; & \dfrac{D\,(x,\,y,\,z)}{D(x_1,\,x_2,\,x_3)}\neq 0,\\ z=z\,(x_1,\ x_2,\ x_3)\end{cases}$$

definește, în domeniul comun de definiție a funcțiilor x, y, z, în care iacobianul lor nu se anulează, un sistem de coordonate curbilinii, care atașează fiecărui punct al domeniului cîte un *triedru local* format de versorii tangenți curbelor coordonate ce trec prin acel punct.

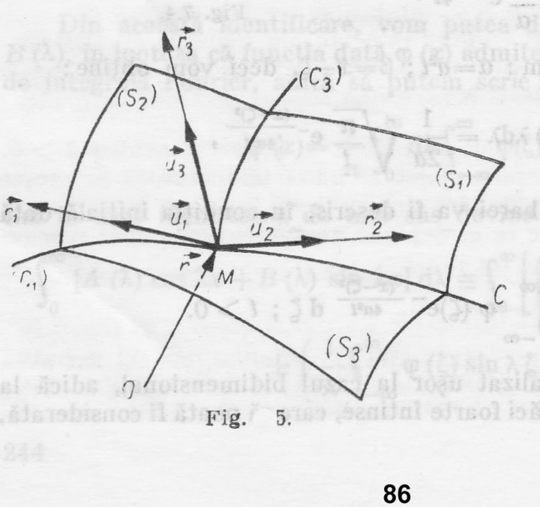

Fig. 5.

Coordonatele unui punct oarecare M, față de acest reper sînt x_1, x_2, x_3, adică valorile parametrilor, corespunzătoare acestui punct, respectiv pe fiecare curbă coordonată.

Tripletele de numere: $(x,\,y,\,z)$ și $(x_1,\,x_2,\,x_3)$ sînt în corespondență bijectivă ele reprezentînd același punct M, față de reperele: cartezian, respectiv reperul curbiliniu.

Vectorul de poziţie $\vec{r}$ al lui M, devine, în urma transformării (T), o funcţie vectorială de noile variabile x_1, x_2, x_3:

$$\vec{r}=x\,(x_1, x_2, x_3)\,\vec{i}+y\,(x_1, x_2, x_3)\,\vec{j}+z\,(x_1, x_2, x_3)\,\vec{k}.$$

Prin derivare parţială în raport cu x_1, x_2, x_3 se obţin vectorii tangenţi curbelor coordonate, în punctul M:

$$\vec{r}_1=\frac{\partial\vec{r}}{\partial x_1}\ ;\ \vec{r}_2=\frac{\partial\vec{r}}{\partial x_2}\ ;\ \vec{r}_3=\frac{\partial\vec{r}}{\partial x_3}\ ,$$

ale căror module vor fi:

$$R_1=|\,\vec{r}_1\,|\ ;\ R_2=|\vec{r}_2|\ \ ;\ R_3=|\,\vec{r}_3\,|,$$

aceste valori, numindu-se *parametrii lui Lamé* ai triedrului local. Valorile acestor parametri Lamé depind, în primul rînd de natura sistemului curbiliniu folosit şi apoi de punctul în care urmează a fi calculaţi.

Versorii acestui triedru, dependenţi şi ei de datele de mai sus, vor fi:

$$\vec{u}_1=\frac{\vec{r}_1}{R_1}\ ;\ \vec{u}_2=\frac{\vec{r}_2}{R_2}\ ;\ \vec{u}_3=\frac{\vec{r}_3}{R_3}\ ,$$

fiind liniar independenţi, odată cu:

$$\vec{r}_1=\frac{\partial x}{\partial x_1}\vec{i}+\frac{\partial y}{\partial x_1}\vec{j}+\frac{\partial z}{\partial x_1}\vec{k}$$

$$\vec{r}_2=\frac{\partial x}{\partial x_2}\vec{i}+\frac{\partial y}{\partial x_2}\vec{j}+\frac{\partial z}{\partial x_2}\vec{k}$$

$$\vec{r}_3=\frac{\partial x}{\partial x_3}\vec{i}+\frac{\partial y}{\partial x_3}\vec{j}+\frac{\partial z}{\partial x_3}\vec{k},$$

pentru care avem satisfăcută condiţia de necoplanaritate:

$$\frac{1}{V_0}R_1R_2R_3=(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial x_1} & \frac{\partial y}{\partial x_1} & \frac{\partial z}{\partial x_1}\\ \frac{\partial x}{\partial x_2} & \frac{\partial y}{\partial x_2} & \frac{\partial z}{\partial x_2}\\ \frac{\partial x}{\partial x_3} & \frac{\partial y}{\partial x_3} & \frac{\partial z}{\partial x_3}\end{vmatrix}\quad\frac{D\,(x, y, z)}{D\,(x_1, x_2, x_3)}\neq 0,$$

unde: $V_0=(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)\neq 0$.

Faţă de reperul: $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$, vom putea scrie pentru diferenţiala $d\vec{r}$, a vectorului de poziţie:

$$d\vec{r}=\vec{r}_1dx_1+\vec{r}_2dx_2+\vec{r}_3dx_3 \Leftrightarrow d\vec{r}=\vec{u}_1R_1dx_1+\vec{u}_2R_2dx_2+\vec{u}_3R_3dx_3,$$

iar mărimile scalare şi cele vectoriale devin :

$$f(M)=f(x_1, x_2, x_3) \, ; \, \vec{V}(M)=U_1(x_1, x_2, x_3)\,\vec{u}_1+U_2(x_1, x_2, x_3)\,\vec{u}_2+$$

$$+U_3(x_1, x_2, x_3)\,\vec{u}_3,$$

pentru care expresiile: gradientului, divergenţei, rotorului, diferă faţă de cele date anterior, în coordonate carteziene.

Observaţie. Alegerea preferenţială, a unui anumit reper curbiliniu, în rezolvarea unei probleme concrete este indicată de natura acelei probleme şi de scopul simplificării calculelor.

Mai ades folosite sînt:

a) *Sistemul coordonatelor sferice,* definit de transformarea :

$$(\mathrm{T}) \begin{cases} x=r\sin\theta\cos\varphi \\ y=r\sin\theta\sin\varphi \, ; \quad M(x, y, z) \leftrightarrow M(r, \theta, \varphi), \\ z=r\cos\theta \end{cases}$$

pentru care valorile parametrilor lui Lamé sînt :

$$R_1=1 \, ; \; R_2=r \, ; \; R_3=r\sin\theta$$

iar valoarea iacobianului :

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, \varphi)}=R_1R_2R_3=r^2\sin\theta\neq 0 \, ; \text{ oricare ar fi } M\neq O.$$

b) *Sistemul coordonatelor cilindrice,* pentru care definiţia rezultă din :

$$(\mathrm{T}) \begin{cases} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \, ; \quad M(x, y, z) \leftrightarrow M(\rho, \varphi, z), \\ z=z \end{cases}$$

are : $R_1=1$; $R_2=\rho$; $R_3=1$ şi iacobianul : $I=R_1R_2R_3=\rho\neq 0$, dacă $M\notin Oz$.

Observaţie : Ambele aceste sisteme sînt *sisteme curbilinii ortogonale,* adică versorii $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ din fiecare punct sînt ortogonali doi cîte doi, ceea ce, aduce substanţiale simplificări de calcul.

12. EXPRESIA GRADIENTULUI ÎN COORDONATE CURBILINII

a) *Într-un sistem curbiliniu oarecare,* pentru funcţia

$$F(x_1, x_2, x_3)$$

raportată la acest sistem, avem :

$$\operatorname{grad} F=\frac{\partial F}{\partial x_1}\operatorname{grad} x_1+\frac{\partial F}{\partial x_2}\operatorname{grad} x_2+\frac{\partial F}{\partial x_3}\operatorname{grad} x_3.$$

Rămîne deci de calculat gradienţii variabilelor x_1, x_2, x_3.

Avem de exemplu :

$$dx_1=(\mathbf{grad}\ x_1)\cdot d\vec{r}=(\vec{r}_1 dx_1+\vec{r}_2 dx_2+\vec{r}_3 dx_3)\cdot \mathbf{grad}\ x_1,$$

sau :

$$dx_1=R_1(\vec{u}_1\cdot \mathbf{grad}\ x_1)\,dx_1+R_2(\vec{u}_2\cdot \mathbf{grad}\ x_1)\,dx_2+$$

$$+R_3(\vec{u}_3\cdot \mathbf{grad}\ x_1)\,dx_3.$$

Însă, dx_1, dx_2, dx_3 fiind creşteri arbitrare, egalitatea de mai sus este o identitate, deci rezultă :

$$(\vec{u}_1\cdot \mathbf{grad}\ x_1)=\frac{1}{R_1};\ \vec{u}_2\cdot \mathbf{grad}\ x_1=0;\ \vec{u}_3\cdot \mathbf{grad}\ x_1=0.$$

Ultimele două relaţii, arătînd ortogonalitatea lui $\mathbf{grad}\ x_1$ cu $\vec{u}_2$ şi $\vec{u}_3$, rezultă că acesta e coliniar cu produsul lor vectorial :

$$\mathbf{grad}\ x_1=\lambda\,(\vec{u}_2\times\vec{u}_3).$$

Prin înmulţirea scalară cu vectorul $\vec{u}_1$:

$$\vec{u}_1\cdot \mathbf{grad}\ x_1=\lambda\,[\vec{u}_1\cdot(\vec{u}_2\times\vec{u}_3)],$$

adică, utilizînd prima relaţie obţinută din identificarea de mai sus :

$$\frac{1}{R_1}=\lambda\,(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3),$$

de unde :

$$\lambda=\frac{1}{(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)\,R_1},$$

iar pentru $\mathbf{grad}\ x_1$, vom avea :

$$\mathbf{grad}\ x_1=\frac{1}{R_1}\frac{\vec{u}_2\times\vec{u}_3}{(\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3)}=\frac{1}{R_1}\vec{u}_1^*.$$

Pentru ceilalţi gradienţi ai lui x_2 şi x_3, obţinînd expresii analoage avem :

$$\mathbf{grad}\ F=\frac{1}{R_1}\frac{\partial F}{\partial x_1}\vec{u}_1^*+\frac{1}{R_2}\frac{\partial F}{\partial x_2}\vec{u}_2^*+\frac{1}{R_3}\frac{\partial F}{\partial x_3}\vec{u}_3^*,$$

unde : $\vec{u}_1^*$, $\vec{u}_2^*$, $\vec{u}_3^*$ sînt reciprocii versorilor triedrului mobil $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$, iar R_1, R_2, R_3 parametrii lui Lamé.

b) Într-un sistem curbiliniu ortogonal, reciprocii versorilor triedrului coincizînd cu înşişi aceşti versori avem :

$$\mathbf{grad}\ F=\frac{1}{R_1}\frac{\partial F}{\partial x_1}\vec{u}_1+\frac{1}{R_2}\frac{\partial F}{\partial x_2}\vec{u}_2+\frac{1}{R_2}\frac{\partial F}{\partial x_3}\vec{u}_3.$$

Aşa de exemplu în coordonate sferice şi respectiv în coordonate cilindrice, ambele fiind sisteme ortogonale, deducem :

$$\mathbf{grad}\,F(r,\theta,\varphi)=\frac{\partial F}{\partial r}\vec{\mathbf{u}}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial\theta}\vec{\mathbf{u}}_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F}{\partial\varphi}\vec{\mathbf{u}}_\varphi$$

şi :

$$\mathbf{grad}\,F(\rho,\varphi,z)=\frac{\partial F}{\partial\rho}\vec{\mathbf{u}}_\rho+\frac{1}{\rho}\frac{\partial F}{\partial\varphi}\vec{\mathbf{u}}_\varphi+\frac{\partial F}{\partial z}\vec{\mathbf{u}}_z\ ;\ (\vec{\mathbf{u}}_z=\vec{k}).$$

13. EXPRESIA ROTORULUI ÎN COORDONATE CURBILINII ORTOGONALE

Pentru cîmpul raportat la un astfel de reper :

$$\vec{\mathbf{V}}(M)=U_1(x_1,x_2,x_3)\,\mathbf{u}_1+U_2(x_1,x_2,x_3)\,\mathbf{u}_2+U_3(x_1\,x_2,x_3)\,\vec{\mathbf{u}}_3,$$

vom avea :

$$\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{V}}=\mathbf{rot}\,(U_1\vec{\mathbf{u}}_1)+\mathbf{rot}\,(U_2\mathbf{u}_2)+\mathbf{rot}\,(U_3\vec{\mathbf{u}}_3).$$

Luînd de exemplu primul termen, avem, deoarece : $\mathbf{grad}\,x_1=\frac{1}{R_1}\vec{\mathbf{u}}_1$:

$$\mathbf{rot}\,(U_1\vec{\mathbf{u}}_1)=\mathbf{rot}\,(U_1R_1\,\mathbf{grad}\,x_1)=U_1R_1\,\mathbf{rot}\,\mathbf{grad}\,x_1+\mathbf{grad}\,(U_1R_1)\times\mathbf{grad}\,x_1,$$

unde primul termen al sumei fiind nul, rămîne :

$$\mathbf{rot}\,(U_1\vec{\mathbf{u}}_1)=\mathbf{grad}\,(U_1R_1)\times\frac{\vec{\mathbf{u}}_1}{R_1}.$$

Aplicînd, acum, cele deduse mai sus în privința gradientului avem :

$$\mathbf{rot}\,(U_1\vec{\mathbf{u}}_1)=\frac{1}{R_1}\left[\frac{1}{R_1}\frac{\partial}{\partial x_1}(U_1R_1)\vec{\mathbf{u}}_1+\frac{1}{R_2}\frac{\partial}{\partial x_2}(U_1R_1)\vec{\mathbf{u}}_2+\frac{1}{R_3}\frac{\partial}{\partial x_3}(U_1R_1)\vec{\mathbf{u}}_3\right]\times\vec{\mathbf{u}}_1,$$

iar după efectuarea înmulțirilor, ținînd seama de ortogonalitatea versorilor : $\vec{\mathbf{u}}_1$, $\vec{\mathbf{u}}_2$, $\vec{\mathbf{u}}_3$, obținem :

$$\mathbf{rot}\,(U_1\vec{\mathbf{u}}_1)=-\frac{1}{R_1R_2}\frac{\partial}{\partial x_2}(U_1R_1)\vec{\mathbf{u}}_3+\frac{1}{R_1R_3}\frac{\partial}{\partial x_3}(U_1R_1)\vec{\mathbf{u}}_2.$$

Transcriind acest rezultat, precum şi celelalte două analoage, sub forma:

$$\mathbf{rot}\,(U_1\vec{\mathbf{u}}_1)=\frac{1}{R_1R_2R_3}\left[R_2\frac{\partial}{\partial x_3}(U_1R_1)\vec{\mathbf{u}}_2-R_3\frac{\partial}{\partial x_2}(U_1R_1)\vec{\mathbf{u}}_3\right]$$

$$\mathbf{rot}\,(U_2\vec{\mathbf{u}}_2)=\frac{1}{R_1R_2R_3}\left[R_3\frac{\partial}{\partial x_1}(U_2R_2)\,\vec{\mathbf{u}}_3-R_1\frac{\partial}{\partial x_3}(U_2R_2)\,\vec{\mathbf{u}}_1\right]$$

$$\mathbf{rot}\,(U_3\vec{\mathbf{u}}_3)=\frac{1}{R_1R_2R_3}\left[R_1\frac{\partial}{\partial x_2}(U_3R_3)\,\vec{\mathbf{u}}_1-R_2\frac{\partial}{\partial x_1}(U_3R_3)\,\vec{\mathbf{u}}_2\right]$$

şi însumînd, găsim în final:

$$\mathbf{rot}\,\vec{V}=\frac{1}{R_1R_2R_3}\begin{vmatrix} R_1\vec{\mathbf{u}}_1 & R_2\vec{\mathbf{u}}_2 & R_3\vec{\mathbf{u}}_3\\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3}\\ R_1U_1 & R_2U_2 & R_3U_3\end{vmatrix}$$

14. EXPRESIA DIVERGENŢEI ÎN COORDONATE CURBILINII ORTOGONALE

Analog ca mai sus, avem:

$$\mathbf{div}\,\vec{V}=\mathbf{div}\,(U_1\vec{\mathbf{u}}_1)+\mathbf{div}\,(U_2\vec{\mathbf{u}}_2)+\mathbf{div}\,(U_3\vec{\mathbf{u}}_3).$$

Ocupîndu-ne din nou numai de primul termen, avem:

$$\mathbf{div}\,(U_1\vec{\mathbf{u}}_1)=\vec{\mathbf{u}}_1\cdot\mathbf{grad}\,U_1+U_1\,\mathbf{div}\,\vec{\mathbf{u}}_1,$$

unde pentru primul termen avem:

$$\vec{\mathbf{u}}_1\cdot\mathbf{grad}\,U_1=\vec{\mathbf{u}}_1\cdot\left(\frac{1}{R_1}\frac{\partial U_1}{\partial x_1}\vec{\mathbf{u}}_1+\frac{1}{R_2}\frac{\partial U_2}{\partial x_2}\vec{\mathbf{u}}_2+\frac{1}{R_3}\frac{\partial U_3}{\partial x_3}\vec{\mathbf{u}}_3\right)=\frac{1}{R_1}\frac{\partial U_1}{\partial x_1},$$

iar pentru al doilea avem de calculat:

$$\mathbf{div}\,\vec{\mathbf{u}}_1=\mathbf{div}\,(\vec{\mathbf{u}}_2\times\vec{\mathbf{u}}_3)=\vec{\mathbf{u}}_3\cdot\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{u}}_2-\vec{\mathbf{u}}_2\cdot\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{u}}_3.$$

Dar:

$$\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{u}}_1=\frac{1}{R_1R_2R_3}\begin{vmatrix} R_1\vec{\mathbf{u}}_1 & R_2\vec{\mathbf{u}}_2 & R_3\vec{\mathbf{u}}_3\\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3}\\ 0 & 1\cdot R_2 & 0\end{vmatrix}$$

sau dezvoltat:

$$\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{u}}_2=\frac{1}{R_1R_2R_3}\left(R_3\frac{\partial R_2}{\partial x_1}\vec{\mathbf{u}}_3-R_1\frac{\partial R_2}{\partial x_3}\vec{\mathbf{u}}_1\right)$$

şi analog:

$$\mathbf{rot}\,\vec{\mathbf{u}}_3=\frac{1}{R_1R_2R_3}\left(R_1\frac{\partial R_3}{\partial x_2}\vec{\mathbf{u}}_1-R_2\frac{\partial R_3}{\partial x_1}\vec{\mathbf{u}}_2\right)$$

de unde

$$\operatorname{div}\vec{u}_1=\frac{1}{R_1R_2R_3}\left(R_3\frac{\partial R_2}{\partial x_1}+R_2\frac{\partial R_3}{\partial x_1}\right)=\frac{1}{R_1R_2R_3}\frac{\partial}{\partial x_1}(R_2R_3).$$

Întorcîndu-ne la **div** $(U_1\mathbf{u}_1)$, găsim :

$$\operatorname{div}(U_1\vec{\mathbf{u}}_1)=\frac{1}{R_1}\frac{\partial U_1}{\partial x_1}+U_1\frac{1}{R_1R_2R_3}\frac{\partial}{\partial x_1}(R_2R_3)=\frac{1}{R_1R_2R_3}\frac{\partial}{\partial x_1}(U_1R_2R_3).$$

Adunînd acest rezultat cu celelalte două obținute prin permutări circulare, avem, în final :

$$\operatorname{div}\vec{V}=\frac{1}{R_1R_2R_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(U_1R_2R_3)+\frac{\partial}{\partial x_1}(R_1U_2R_3)+\frac{\partial}{\partial x_3}(R_1R_2U_3)\right].$$

Consecință. Aplicînd acest rezultat pentru *coordonatele sferice,* putem scrie :

$$\operatorname{div}\vec{V}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2U_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(U_2\sin\theta)+\frac{\partial U_3}{\partial\varphi}\right],$$

iar pentru cele *cilindrice :*

$$\operatorname{div}\vec{V}=\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho U\rho)+\frac{\partial U\varphi}{\partial\varphi}\right)+\frac{\partial U_z}{\partial z}.$$

15. EXPRESIA LAPLACEIANULUI ÎN COORDONATE CURBILINII ORTOGONALE

Se deduce imediat din relația :

$$\Delta F=\operatorname{div}\operatorname{grad}F,$$

deci :

$$\Delta F=\frac{1}{R_1R_2R_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(R_2R_3\cdot\frac{1}{R_1}\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(R_1R_3\cdot\frac{1}{R_2}\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(R_1R_2\cdot\frac{1}{R_3}\frac{\partial F}{\partial x_3}\right)\right]$$

adică :

$$\Delta F=\frac{1}{R_1R_2R_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{R_2R_3}{R_1}\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{R_1R_3}{R_2}\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{R_1R_2}{R_3}\frac{\partial F}{\partial x_3}\right)\right].$$

Consecință. Laplaceianul în *coordonate sferice* are expresia :

$$\Delta F=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial F}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial F}{\partial\theta}\sin\theta\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}.$$

iar în *coordonate cilindrice*:

$$\Delta F=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial F}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\rho^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2},$$

expresii care, pe lîngă utilizarea frecventă în probleme din teoria cîmpurilor, sînt folosite şi în soluţionarea ecuaţiei lui Laplace: $\Delta U=0$, atunci cînd acestea sînt avantajoase.

16. FORMULELE LUI GREEN

Avînd date două cîmpuri scalare:

$$\varphi(M) \text{ şi } \psi(M)$$

definite pe un acelaşi domeniu Ω şi admiţînd derivate pînă la ordinul doi inclusiv, continue, putem forma, cu ajutorul lor, următoarele cîmpuri vectoriale:

$$\vec{V}_1=\varphi \operatorname{grad} \psi\ ;\ \vec{V}_2=\psi \operatorname{grad} \varphi,$$

care ne permit deducerea următoarelor formule:

a) *Formula întîia a lui Green*, se obţine aplicînd formula integrală a divergenţei oricăruia din cei doi vectori $\vec{V}_1$ sau $\vec{V}_2$.

Avem de exemplu, pentru $\vec{V}_1$:

$$\iint_S \vec{n}\cdot\vec{V}_1 d\sigma=\iint_S \varphi\vec{n}\cdot \operatorname{grad}\psi\, d\sigma=\iint_S \varphi\frac{d\psi}{d\vec{n}}d\sigma,$$

iar pentru membrul drept al formulei:

$$\iiint_\Omega \operatorname{div}\vec{V}_1 d\omega=\iiint_\Omega \operatorname{div}(\varphi \operatorname{grad}\psi)\, d\omega=$$

$$\iiint_\Omega (\operatorname{grad}\varphi\cdot\operatorname{grad}\psi+\varphi \operatorname{div}\operatorname{grad}\psi)\, d\omega=\iiint_\Omega (\operatorname{grad}\varphi\cdot\operatorname{grad}\psi+\varphi\Delta\psi)\, d\omega.$$

Obţinem, deci *prima formulă a lui Green*:

$$\iint_S \varphi\frac{d\psi}{d\vec{n}}d\sigma=\iiint_\Omega(\operatorname{grad}\varphi\cdot\operatorname{grad}\psi+\varphi\Delta\psi)\, d\omega,$$

şi cea analoagă pentru vectorul $\vec{V}_2$:

$$\iint_S \psi\frac{d\varphi}{d\vec{n}}d\sigma=\iiint_\Omega(\operatorname{grad}\psi\cdot\operatorname{grad}\varphi+\psi\Delta\varphi)\, d\omega$$

care poartă acelaşi nume (rolurile între φ şi ψ fiind schimbate).

b) *Formula a doua a lui Green* se obţine prin scăderea celor două egalităţi date de prima formulă a lui Green, adică:

$$\iint_S\left(\varphi\frac{d\psi}{d\vec{n}}-\psi\frac{d\varphi}{d\vec{n}}\right)d\sigma=\iiint_\Omega(\varphi\Delta\psi-\psi\Delta\varphi)\, d\omega,$$

care, dacă ne gîndim la felul cum a fost dedusă, nu este altceva decît formula integrală a divergenței aplicată cîmpului :

$$\vec{V}=\vec{V}_1-\vec{V}_2=\varphi \,\mathbf{grad}\, \psi-\psi \,\mathbf{grad}\, \varphi=\varphi^2 \,\mathbf{grad}\, \frac{\psi}{\varphi}.$$

Cazuri particulare : 1°) Prima formulă a lui Green în cazul $\psi=\varphi$, devine :

$$\iint_S \varphi \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\vec{n}} \mathrm{d}\sigma=\iiint_\Omega [(\mathbf{grad}\,\varphi)^2+\varphi\Delta\varphi]\, \mathrm{d}\omega.$$

2°) Formula a doua a lui Green se particularizează, pentru : $\psi=1$, în :

$$\iint_S \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\vec{n}} \mathrm{d}\sigma=\iiint_\Omega \Delta\varphi\, \mathrm{d}\omega.$$

§.6. DETERMINAREA VALORILOR UNUI CÎMP SCALAR $\varphi(M)$ ÎN PUNCTELE INTERIOARE UNUI DOMENIU Ω, CUNOSCÎND VALORILE LUI φ ȘI $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\vec{n}}$ PE FRONTIERA (S) A DOMENIULUI ȘI VALORILE LAPLACEIANULUI : $\Delta\varphi$ ÎN INTERIOR

Cu alte cuvinte, dîndu-se :

a) $\varphi(P)\equiv h_1(P)$; $\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\vec{n}}\right)_P=h_1(P)$; pentru $P\in(S)$ și :

b) $\Delta\varphi(M)\equiv \mathrm{f}(M)$; dacă $M\in\Omega$, se cere : $\varphi(M)$, pentru orice $M\in\Omega$, în ipoteza continuității derivatelor sale parțiale de ordinul doi.

Pentru rezolvarea acestei probleme, vom folosi a doua formulă a lui Green. alegînd a doua funcție :

$$\Psi=\frac{1}{r}\;;\; r=|\vec{r}|\;;\;\vec{r}=\vec{MP},$$

unde $\vec{r}$ este, deci, vectorul de poziție față de $M\in\Omega$ (M considerat fix), a unui punct variabil P de pe suprafață, sau a unui punct variabil $P'\neq M$, din interior

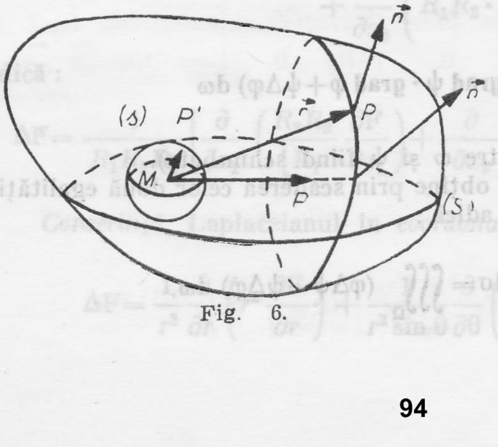

Fig. 6.

Această alegere : $\Psi=\frac{1}{r}$ s-a făcut, deoarece, avem :

$$\Delta\Psi=0,$$

adică $\frac{1}{r}$ este funcție armonică.

Vom aplica, acum, formula a doua a lui Green domeniului $\Omega-\omega$, obţinut după ce am izolat punctul M printr-o sferă de rază ρ suficient de mică, avînd centrul în M, volumul Ω şi frontiera (s).

Vom avea:

$$\iint_S \left[\varphi \frac{d}{d\vec{n}}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{d\vec{n}}\right] d\sigma_P + \iint_s \left[\varphi \frac{d}{d\vec{n}}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{d\vec{n}}\right] d\sigma_{P''} = -\iiint_\Omega \frac{\Delta\varphi}{r} d\omega_{P'}$$

unde: $P \in (S)$; $P' \in \Omega - \omega$; $P'' \in (s)$.

Înainte de a trece la limită, reducînd sfera (S) la punctul M, adică toate punctele $P'' \to M$, vom aplica formula mediei celor două integrale, în care se desface integrala pe sfera (s), ţinînd seama că normala la (s), fiind îndreptată spre exteriorul lui $\Omega - \omega$, va fi îndreptată în interiorul sferei (s), adică va fi:

$$\vec{n} = -\frac{\vec{r}}{r}\ ;\ \vec{r} = \overrightarrow{MP''}.$$

Vom avea deci pentru sfera (s):

$$\frac{d}{d\vec{n}}\left(\frac{1}{r}\right) = \mathbf{grad}\left(\frac{1}{r}\right)\left(-\frac{\vec{r}}{r}\right) = \left(-\frac{\vec{r}}{r^3}\right)\left(-\frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{1}{\rho^2}.$$

Prima dintre integralele amintite mai sus, devine:

$$I_1 = \iint_s \varphi \frac{d}{d\vec{n}}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma_{p''} = \frac{1}{\rho^2}\iint_s \varphi d\sigma_{p''},$$

iar după aplicarea formulei mediei:

$$I_1 = \frac{1}{\rho^2}\varphi(Q') \cdot 4\pi\rho^2 = 4\pi\varphi(Q'),$$

punctul Q' fiind pe sfera (s).

Pentru cea de-a doua integrală, derivata lui φ pe direcţia normalei fiind mărginită (datorită continuităţii derivatelor parţiale de ordinul doi), vom avea:

$$I_2 = \iint_s \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{d\vec{n}} d\sigma_{P''} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{d\varphi}{d\vec{n}}\right)_{Q''} \cdot 4\pi\rho^2 = 4\pi\rho\left(\frac{d\varphi}{d\vec{n}}\right)_{Q''};$$

punctul Q'' fiind şi el pe sfera (s).

Trecînd la limită avem:

$$\lim_{\substack{P''\to M\\(Q'\to M_0)}} I_1 = 4\pi\varphi(M)\ ;\ \lim_{\substack{P'',Q\to M_0\\(\rho\to 0)}} I_2 = 0,$$

deci vom obține:

$$\iint_S \left[\varphi \frac{d}{d\vec{n}}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{d\vec{n}}\right] d\sigma_p + 4\pi\varphi(M) = -\iiint_\Omega \frac{\Delta\varphi}{r} d\omega_p,$$

de unde:

$$(M) = \frac{1}{4\pi}\iint_S \left[\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{d\vec{n}} - \varphi\frac{d}{d\vec{n}}\left(\frac{1}{r}\right)\right] d\sigma - \frac{1}{4\pi}\iiint_\Omega \frac{\Delta\varphi}{r} d\omega.$$

Cum punctul M, a fost fixat arbitrar în Ω, formula obținută ne dă valorile cîmpului φ în toate punctele interioare ale lui Ω, cu ajutorul unei integrale de suprafață și a unei integrale improprii de volum (deoarece $r=0$ în M).

Observație. Dacă φ este presupusă armonică în Ω atunci:

$$\Delta\,\varphi \equiv 0 \Leftrightarrow \varphi(M) = \frac{1}{4\pi}\iint_S \left[\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{d\vec{n}} - \varphi\frac{d}{d\vec{n}}\left(\frac{1}{r}\right)\right] d\sigma,$$

adică φ e cunoscută în Ω, numai din datele de pe frontieră.

§.7. FUNCȚII ARMONICE. PROPRIETĂȚI.

Definiție. Funcția $f(M)$ este *armonică* într-un domeniu Ω, dacă:
1) are derivate parțiale continue în Ω.
2) verifică ecuația lui Laplace: $\Delta f=0$, în Ω.

Din formulele lui Green și din cele tratate la paragraful anterior se pot deduce următoarele:

Proprietăți: I) *Pentru orice suprafață închisă (S) situată în domeniul de armonicitate, avem:*

a) $\iint_S \frac{df}{d\vec{n}} d\sigma = 0$; (din relația: $\iint_S \frac{df}{d\vec{n}} d\sigma = \iiint_\Omega \Delta f\, d\omega$)

b) $\iint_S f\frac{df}{d\vec{n}} d\sigma = \iiint_{\Omega_S} (\mathbf{grad}\, f)^2\, d\,\omega$; (din formula întîia a lui Green pentru $\varphi=\psi=f$, cu $\Delta f=0$).

II) *Valorile unei funcții armonice, în punctele interioare lui $\Omega_S \subset \Omega$, sînt perfect determinate de cunoașterea pe frontiera (S) a valorilor sale și ale derivatei pe direcția normalei.*

$$f(M) = \frac{1}{4\pi}\iint_S \left(\frac{1}{r}\frac{df}{d\vec{n}} - f\frac{d}{d\vec{n}}\left(\frac{1}{r}\right)\right) d\sigma.$$

Acest rezultat, îl cunoaștem deja, din paragraful precedent.

III) *Proprietatea de medie* (Teorema lui Gauss): *Valoarea funcției $f(M)$ din centrul M al unei sfere, situată într-un domeniu de armonicitate a lui f, este media valorilor ei pe sferă.*

$$f(M) = \frac{1}{4\pi a^2}\iint_S f(P)\, d\sigma\ ;\ \ (a \text{ fiind raza sferei } S).$$

Demonstrație: Aplicînd formula amintită la proprietatea II), pentru sfera (S) și cu M ales în centrul sferei vom avea $r=a$, deci :

$$f(M)=\frac{1}{4\pi a}\iint_S \frac{df}{d\vec{n}}d\sigma-\frac{1}{4\pi}\iint_S f\frac{d}{d\vec{n}}\left(\frac{1}{r}\right)d\sigma.$$

Prima integrală este nulă, conform proprietății Ia), iar pentru a doua avem : $\vec{n}=\frac{\vec{r}}{r}$, fiind vorba de normala exterioară a sferei, deci vom putea scrie :

$$\frac{d}{d\vec{n}}\left(\frac{1}{r}\right)\bigg|_S=\left(\mathbf{grad}\,\frac{1}{r}\right)\frac{\vec{r}}{r}\bigg|_{(S)}=\left(-\frac{\vec{r}}{r^3}\right)\frac{\vec{r}}{r}\bigg|_S=-\frac{1}{a^2},$$

deci se obține, într-adevăr :

$$f(M)=-\frac{1}{4\pi}\iint_S\left(-\frac{1}{a^2}\right)f(P)\,d\sigma=\frac{1}{4\pi a^2}\iint_S f(P)\,d\sigma.$$

IV) *Dacă funcția f, armonică în tot spațiul, verifică o relație de forma :*

$$|f(P)|<\frac{A}{\rho^\lambda},\ \text{pentru}\ \rho>R,$$

unde : $\rho=|\overrightarrow{OP}|$, *cu O fix, A și* λ *constante pozitive, iar* $R>0$ *fiind oricît de mare, atunci* $f(M)\equiv 0$, *în tot spațiul* R^3.

Demonstrație: Luăm o sferă S cu centrul în M și raza a suficient de mare, astfel ca distanțele OP, de la punctul fix O interior la orice punct P de pe sferă, să fie toate mai mari ca R $(\rho=OP>R)$.

Avem, atunci, după teorema lui Gauss :

$$|f(M)|=\frac{1}{4\pi}\left|\iint_S f(P)\,d\sigma\right|\leqslant\frac{1}{4\pi a^2}\iint_S|f(P)|\,d\sigma\leqslant\frac{A}{4\pi a^2}\iint_S\frac{d\sigma}{\rho^\lambda}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{A}{4\pi a^2}\cdot\frac{1}{\rho_1^\lambda}\iint_S d\sigma=\frac{A}{4\pi a^2}\cdot\frac{1}{\rho_1^\lambda}\cdot 4\pi a^2=\frac{A}{\rho_1^\lambda},$$

unde : $\rho_1=\min\limits_{P\in S} OP=OP_1$.

Alegerea valorii ρ_1 depinzînd de a, ea va crește nelimitat, odată cu a, relația obținută :

$$|f(M)|<\frac{A}{\rho_1^\lambda};\ \rho_1>R,$$

ne spune că $|f(M)|$ poate fi oricît de mic, și cum $f(M)$ e o valoare fixă (nu depinde de P) înseamnă că ea nu poate fi decît nulă, deci avem :

$$f(M)\equiv 0;\ \text{oricare ar fi}\ M\in R^3.$$

V) *Extremele unei funcții armonice nu pot fi atinse decît pe frontiera domeniului de armonicitate.*

Demonstrație. Presupunem, prin absurd, că în punctul interior M_0, funcția armonică f ar avea, de exemplu, un maxim. Atunci există o sferă cu rază ρ suficient de mică și centru M_0, astfel ca în orice punct P al său, să avem:

$$f(P) < f(M_0).$$

Integrînd membru cu membru, rezultă:

$$\iint_S f(P)\,d\sigma < f(M_0)\iint_S d\sigma = 4\pi\rho^2 f(M_0),$$

adică:

$$f(M_0) > \frac{1}{4\pi\rho^2}\iint_S f(P)\,d\sigma$$

ceea ce contrazice teorema lui Gauss.

Evident demonstrația decurge similar în ipoteza unui minim, deci atît maximele cît și minimele lui f nu pot fi atinse decît pe frontieră.

VI) *Dacă funcția* f(M) *e armonică într-un domeniu* Ω_S *mărginit de o suprafață închisă* (S) *și e continuă pe* $\Omega_S \cup (S)$, *avînd valoarea zero pe frontiera* (S), *iar* $\frac{df}{d\vec{n}}$ *e mărginită în toate punctele acestei frontiere, atunci* $f(M) \equiv 0$ *în tot domeniul* Ω_S.

Demonstrație: Conform proprietății I b) avem:

$$\iiint_{\Omega_S} (\mathbf{grad}\, f)^2\, d\omega = \iint_S f\frac{df}{d\vec{n}}\,d\sigma = 0,$$

egalitatea cu zero a ultimei integrale avînd loc datorită anulării funcției f în punctele P ale lui S.

Avînd, sub integrala de volum o cantitate nenegativă, rezultă că anularea acestei integrale este echivalentă cu anularea acestei cantități deci avem în mod obligatoriu:

$$\mathbf{grad}\, f \equiv 0 \text{ în } \Omega_S \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} \equiv \frac{\partial f}{\partial y} \equiv \frac{\partial f}{\partial z} \equiv 0 \Leftrightarrow f \equiv \text{constant}.$$

Această valoare constantă luată de către f în punctele lui Ω_S nu poate fi decît zero, care este valoarea lui f pe frontiera (S), f fiind, prin ipoteză, continuă pe $\Omega_S \cup (S)$, așa că va trebui să avem:

$$f(M) \equiv 0 \text{ în } \Omega_S.$$

Consecințe: a) *Două funcții* f(M) *și* g (M) *armonice în* Ω_S *și continue pe* $\Omega_S U (S)$, *care iau valori egale pe* (S) *și* $\frac{df}{d\vec{n}}$ *și* $\frac{dg}{d\vec{n}}$ *mărginite, vor diferi una de alta printr-o constantă în tot domeniul* Ω_S.

Demonstrația rezultă din aplicarea proprietății VI) diferenței: f—g, de unde va rezulta:

$$f - g = \text{constant în } \Omega_S.$$

b) O funcție armonică într-un domeniu și cu derivatele pe direcția normalelor la frontiera acestui domeniu mărginite, este complet determinată în acest domeniu, atunci cînd i se dau valorile pe frontiera acestuia.

Observație. Problema determinării unei funcții armonice într-un domeniu, cînd i se dau valorile pe frontieră este *numită problema lui Dirichlet.*

VII) *O funcție* f (M) *armonică în* Ω_S, *cu* $\left.\frac{df}{d\vec{n}}\right|_S=0$, *se reduce la o constantă:*

$$f(M)\Big|_{M\in\Omega_S}=\text{constant}$$

Demonstrația se bazează tot pe proprietatea I b) :

$$\iiint_{\Omega_S}(\mathbf{grad}\ f)^2\,d\omega=\iint_S f\frac{df}{d\vec{n}}\,d\sigma=0,$$

egalitatea cu zero a ultimei integrale avînd loc din cauza lui $\left.\frac{df}{d\vec{n}}\right|_S=0$, care implică și acum :

$$\mathbf{grad}\ f\Big|_{M\in\Omega_S}=0\Leftrightarrow f(M)\Big|_{M\in\Omega_S}=\text{constant},$$

Valoarea constantei rămînînd nedeterminată, deoarece lipsesc condițiile suplimentare care s-o determine.

Consecințe : a) *Dacă pentru două funcții* f (M) și g (M), *armonice în* Ω_S ; avem :

$$\left.\frac{df}{d\vec{n}}\right|_S=\left.\frac{dg}{d\vec{n}}\right|_S,$$

atunci ele diferă în interiorul lui Ω_S *printr-o constantă.*

Demonstrația se face aplicînd proprietatea VII) diferenței h=f−g, care va fi și ea armonică în Ω_S și va avea, conform ipotezei :

$$\left.\frac{dh}{d\vec{n}}\right|_S=0,\ \text{deci}\ h(M)\Big|_{M\in\Omega_S}=\text{constant}.$$

adică :

$$f-g=\text{constant}.$$

b) *O funcție armonică într-un domeniu, este determinată pînă la o constantă aditivă, de către valorile derivatei sale pe direcția normalei* la frontiera domeniului.

Observație : Problema determinării unei funcții armonice într-un domeniu, cînd i se dau valorile derivatei pe direcția normalei la frontieră, se numește *problema lui Neuman*, care împreună cu problema lui Dirichlet constituie două probleme celebre în fizica matematică.

§.8. STUDIUL UNUI REGIM STAȚIONAR DE TEMPERATURĂ ÎN INTERIORUL UNUI CILINDRU CIRCULAR

Să considerăm un cilindru de lungime finită l și rază a confecționat dintr-un material cu proprietăți de simetrie radială, în ceea ce privește conductibilitatea termică, adică într-o secțiune perpendiculară pe axa sa, temperatura este distribuită uniform de la axă spre periferie (toate puncte egal depărtate de axă, au aceeași temperatură).

Vom considera că în interiorul cilindrului s-a stabilit un regim termic staționar determinat de menținerea suprafeței laterale a cilindrului la temperatura zero, iar la cele două capete se cunosc distribuțiile temperaturii în fiecare punct al bazelor (evident independente de timp).

Cum, în interiorul cilindrului nu există surse de căldură, $f(x, y, z) \equiv 0$, iar datorită regimului staționar $\frac{\partial u}{\partial t} \equiv 0$, ecuația distribuției de căldură se reduce la ecuația lui Laplace (deci de tip eliptic):

$$\Delta u = 0,$$

cu condițiile de margine (frontieră):

$$u|_{S_l} = 0 \;;\; u|_{S_1} = f_1(P) \;;\; u|_{S_2} = f_2(P),$$

unde: S_l, S_1 și S_2 sînt respectiv: suprafața laterală și dele două suprafețe de secțiune de la capete ale cilindrului.

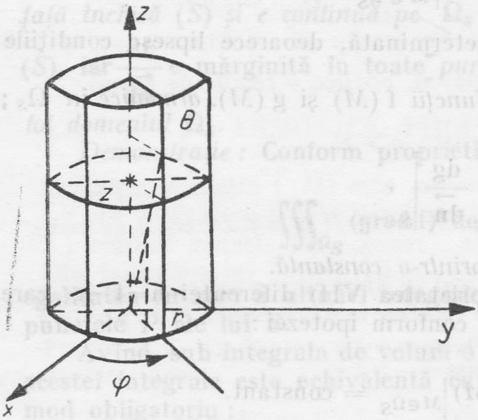

Fig. 7.

Ținînd seama de forma particulară a domeniului (cilindru) și de proprietățile materialului, presupuse mai sus, deducem că tratarea problemei se pretează la folosirea sistemului de coordonate cilindrice, luînd axa Oz în lungul axei cilindrului.

În acest caz, temperatura u, nu va depinde efectiv de variabila φ a punctului variabil $M(r, \varphi, z)$ din interiorul cilindrului (datorită proprietăților materialului, temperatura nu depinde de direcția de deplasare în secțiunea normală).

Ecuația lui Laplace: $\Delta = 0$, în coordonate cilindrice fiind:

$$\Delta u(r, \varphi, z) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

în condițiile noastre, avînd $\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \equiv 0$, ne rămîne de integrat ecuația:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \;;\; (u = u(r, z))$$

cu condițiile de frontieră:

$$u(a, z) \equiv 0 \;;\; u(r, 0) \equiv f_1(r) \;;\; u(r, l) \equiv f_2(r).$$

$$0 \leqslant z \leqslant l \;;\; 0 \leqslant r \leqslant a.$$

Integrarea acestei ecuații o vom face, și în acest caz, prin metoda separării variabilelor, luînd:

$$u(r, z) = R(r) \cdot Z(z),$$

în urma căreia ecuația lui Laplace se va scrie:

$$R''(r)\,Z(z)+\frac{1}{r}\,R''(r)\,Z(z)+Z''(z)\,R(r)=0,$$

sau în urma separării variabilelor:

$$\frac{rR''(r)+R'(r)}{rR(r)}=-\frac{Z''(z)}{Z(z)}=k \quad (k=\text{constant})$$

din care obținem două ecuații diferențiale de ordinul doi:

$$Z''(z)+k\,Z(z)=0 \quad \text{și} \quad rR''(r)+R'(r)-krR(r)=0,$$

pentru care considerăm numai cazul $k<0$, punînd $k=-\lambda^2$ (celelalte cazuri dau soluții care, în general, nu concordă cu condițiile de frontieră).

Vom avea în acest caz, pentru prima ecuație:

$$Z''(z)-\lambda^2 Z(z)=0,$$

soluția generală:

$$Z(z)=C\mathrm{ch}\lambda z+D\mathrm{sh}\lambda z,$$

unde am ales ca sistem fundamental de soluții, funcțiile $\mathrm{ch}\lambda z$ și $\mathrm{sh}\lambda z$, în locul sistemului, mai des utilizat: $e^{\lambda z}$; $e^{-\lambda z}$

Ecuația a doua, după înmulțire cu r, se va scrie:

$$r^2R''(r)+rR'(r)+(\lambda^2r^2-0^2)\,R(r)=0,$$

care este ecuația lui Bessel, cu indicele $\nu=0$ și cu soluția generală:

$$R(r)=AJ_0(\lambda r)+BN_0(\lambda r),$$

unde: $J_0(x)$ și $N_0(x)$ sînt funcțiile Bessel de indice zero și de speța întîia, respectiv a doua (N_ν=funcția lui Neumann).

Observînd că pe axa cilindrului, adică pentru $r=0$, avem:

$$J_0(0)=1 \text{ și } \lim_{r\to 0} N_0(\lambda r)=+\infty$$

ceea ce ar însemna o contradicție cu legile fizicii, deci trebuie să luăm $B=0$ iar pe A îl luăm egal cu 1, deoarece factorul $Z(z)$ conține deja constante arbitrare.

Obținem pentru soluțiile de forma propusă:

$$u(r,z)=(C\mathrm{ch}\lambda z+D\mathrm{sh}\lambda z)\,J_0(\lambda r),$$

soluție căreia îi impunem condiția dată pe suprafața laterală a cilindrului:

$$u(a,z)\equiv 0 \Leftrightarrow (C\mathrm{ch}\lambda z+D\mathrm{sh}\lambda z)\,J_0(\lambda a)\equiv 0\;;\ \text{oricare ar fi } z\in[0,l].$$

Pentru a evita soluția banală obținută pentru $C=D=0$, trebuie să avem în mod necesar: $J_0(\lambda a)=0$.

Cum avem $\lambda a>0$, va trebui să avem pentru λa, valorile:

$$\lambda a=x_n\;;\ n=0,1,2,\ldots,$$

unde x_n sînt rădăcinile pozitive ale funcției Bessel $J_0(x)$ care știm că, sînt o infinitate numărabilă, deci și pentru λ rezultă o infinitate de valori proprii, formînd un spectru discret:

$$\Lambda=\left\{\lambda_n \mid \lambda_n=\frac{x_n}{a}\;;\ J_0(x_n)=0\;;\ n=1,2,\ldots\right\}.$$

Funcțiile proprii, corespunzătoare valorilor proprii λ_n, vor fi:

$$u_n(r, z) = \left(C_n \operatorname{ch} \frac{x_n}{a} z + D_n \operatorname{sh} \frac{x_n}{a} z\right) J_0\left(\frac{x_n}{a} r\right),$$

unde, după cum se știe de la teoria funcțiilor Bessel, șirul:

$$J_0(x_1 x);\ J_0(x_2 x);\ \ldots;\ J_0(x_n x);\ \ldots$$

este ortogonal, cu ponderea: $p(x) = x$, pe intervalul $[0, 1]$, adică:

$$\int_0^1 x J_0(x_k x) J_0(x_m x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0; & k \neq m \\ \dfrac{1}{2} J_0'^2(x_m) = \dfrac{1}{2} J_1^2(x_m); & k = m. \end{cases}$$

În cazul nostru, șirul: $\left\{J_0\left(x_n \frac{r}{a}\right)\right\}$ va fi ortogonal cu ponderea: $p(r) = \frac{r}{a}$, pe intervalul $[0, a]$, deci soluția cea mai cuprinzătoare ce verifică condiția nulă pe suprafața laterală a cilindrului va fi dată de seria:

$$u(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \operatorname{ch} \frac{x_n}{a} z + D_n \operatorname{sh} \frac{x_n}{a} z\right) J_0\left(x_n \frac{r}{a}\right)$$

care pentru orice z fixat, apare ca sumă a unei serii de funcții Bessel din șirul de mai sus. Determinarea coeficienților C_n și D_n ai acestei serii se obține punînd și celelalte două condiții de frontieră relativ la bazele cilindrului:

$$u(r, 0) \equiv f_1(r) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0\left(x_n \frac{r}{a}\right) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n J_0\left(x_n \frac{r}{a}\right)$$

unde α_n sînt coeficienții seriei Fourier-Bessel a funcției $f_1(r)$, după șirul $J^0\left(x_n \frac{r}{a}\right)$ și au valorile:

$$\alpha_n = \frac{2}{a^2 J_1^2(x_n)} \int_0^a f_1(r)\, r J_0\left(x_n \frac{r}{a}\right) \mathrm{d}r,$$

coeficienți care trebuie să coincidă cu C_n, din identificarea celor două serii de mai sus; deci: $C_n = \alpha_n$.

Din a doua condiție:

$$u(r, l) \equiv f_2(r) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \operatorname{ch} \frac{x_n}{a} l + D_n \operatorname{sh} \frac{x_n}{a} l\right) J_0\left(x_n \frac{r}{a}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n J_0\left(x_n \frac{r}{a}\right),$$

rezultă:

$$\alpha_n \operatorname{ch} \frac{x_n}{a} l + D_n \operatorname{sh} \frac{x_n}{a} l = \beta_n,$$

unde β_n sînt coeficienții dezvoltării, după șirul $J_0\left(x_n \frac{r}{a}\right)$, a funcției $f_2(r)$, adică:

$$\beta_n = \frac{2}{a^2 J_1^2(x_n)} \int_0^a f_2(r)\, r J_0\left(x_n \frac{r}{a}\right) \mathrm{d}r,$$

deci vom avea:

$$D_n = \frac{\beta_n}{\operatorname{sh}\frac{x_n}{a}l} - \alpha_n \operatorname{cth}\frac{x_n}{a}l.$$

Înlocuind coeficienţii C_n şi D_n astfel determinaţi în seria lui $u(r, z)$ o putem scrie sub forma:

$$u(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\alpha_n \frac{1}{\operatorname{sh}\left(x_n\frac{l}{a}\right)}\operatorname{sh}\left(x_n\frac{l-z}{a}\right) + \beta_n \frac{1}{\operatorname{sh}\left(x_n\frac{l}{a}\right)}\operatorname{sh}\left(x_n\frac{z}{a}\right)\right] J_0\left(x_n\frac{r}{a}\right),$$

rezultat care dă distribuţia valorilor temperaturii în punctele cilindrului, sub forma unei serii de funcţii Bessel (adică de funcţii cilindrice, de unde le vine şi numele).

Se verifică şi direct că seria de mai sus verifică ecuaţia lui Laplace (bineînţeles scrisă în coordonate cilindrice), iar pentru $z=0$ şi respectiv pentru $z=l$, această serie se reduce la seria Fourier-Bessel a primei functii: $f_1(r)$, respectiv a celei de a doua: $f_2(l)$.

Acest exemplu a fost conceput în aşa fel ca să conducă la rezolvarea unei probleme Dirichlet (particulare bineînţeles, datorită independenţei de φ) pentru un domeniu cilindric.

§.9. PROBLEMA LUI DIRICHLET PENTRU CERC

Ca orice problemă Dirichlet, această problemă cere determinarea unei funcţii armonice într-un domeniu, care în cazul nostru este un domeniu plan de formă circulară, cînd se dau valorile acestei funcţii pe frontieră (adică în cazul nostru se dau valorile funcţiei în punctele cercului (C)).

Avem deci de rezolvat ecuaţia lui Laplace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 0, \text{ cu: } u(P)\Big|_{P\in(C)} = \mathrm{f}(P) = \mathrm{f}(s).$$

Vom ţine seama de forma domeniului şi vom trece ecuaţia lui Laplace în coordonate polare în plan:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = 0;$$

$$(U(r, \varphi) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

cu condiţia:

$$U(1, \varphi) = \mathrm{f}(\varphi);\ \varphi \in (0, 2\pi),$$

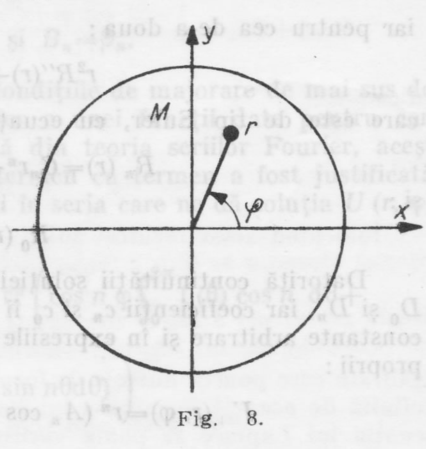

Fig. 8.

în ipoteza că vom considera raza $a=1$, pentru început, caz în care arcul s, ce fixează poziţia punctului P pe frontieră devine:

$$s = a\varphi = \varphi,$$

deci funcţia f dată în condiţiile de frontieră va trebui să fie o funcţie periodică de variabila φ, adică: $f(\varphi+2\pi)\equiv f(\varphi)$, pentru orice valoare r fixată, proprietate pe care va trebui s-o aibă şi soluţia căutată.

Vom integra ecuaţia lui Laplace prin metoda separării variabilelor, punînd:

$$U(r, \varphi)=R(r)\Phi(\varphi),$$

după care ecuaţia devine:

$$R''(r)\Phi(\varphi)+\frac{1}{r}R'(r)\Phi(\varphi)+\frac{1}{r^2}R(r)\Phi''(\varphi)=0,$$

iar în urma separării variabilelor:

$$\frac{r^2R(r)+rR'(r)}{R(r)}=-\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}=k.$$

Cele două ecuaţii diferenţiale rezultate, sînt:

$$\Phi''(\varphi)+k\Phi(\varphi)=0 \text{ şi } r^2R''(r)+rR'(r)-kR(r)=0.$$

Din condiţia de frontieră:

$$U(1, \varphi)\equiv f(\varphi) \Leftrightarrow R(1)\Phi(\varphi)\equiv f(\varphi),$$

rezultă periodicitatea, de perioadă $T=2\pi$ pentru soluţia $\Phi(\varphi)$ datorită existenţei acestei proprietăţi pentru funcţia dată $f(\varphi)$, de unde deducem pentru k, valorile spectrale: $k_n=n^2$, formînd un spectru discret, numărabil:

$$\Lambda=\{k_n \mid k_n=n^2;\ n=0, 1, 2, \ldots\}$$

Integrînd, atunci prima ecuaţie:

$$\Phi''(\varphi)+n^2\Phi(\varphi)=0,$$

obţinem pentru fiecare n cîte o soluţie generală:

$$\Phi_n(\varphi)=A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi,$$

iar pentru cea de-a doua:

$$r^2R''(r)+rR'(r)-n^2R(r)=0,$$

care este de tip Euler, cu ecuaţia caracteristică: $\lambda^2-n^2=0$.

$$R_n(r)=C_nr^n+D_nr^{-n}, \text{ pentru } n\neq 0$$

şi:

$$R_0(r)=C_0+D_0\ln r.$$

Datorită continuităţii soluţiei căutate, va trebui să anulăm coeficienţii: D_0 şi D_n, iar coeficienţii c_n şi c_0 îi putem alege egali cu 1, ţinînd cont că avem constante arbitrare şi în expresiile funcţiilor $\Phi_n(\varphi)$. Vom avea atunci funcţiile proprii:

$$U_n(r, \varphi)=r^n(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi);\ n=0, 1, 2\ldots$$

Cea mai generală soluţie ce verifică condiţiile de frontieră, va fi seria:

$$U(r, \varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}U_n(r, \varphi)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}r^n(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi),$$

serie care este absolut şi uniform convergentă în orice cerc cu centrul în origine şi de rază $\rho < 1$, dacă pentru orice $r < \rho < 1$, ea admite o serie majorantă, adică dacă aşa cum rezultă din inegalităţile :

$$|A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi| \leqslant |A_n| + |B_n|,$$

putem găsi un număr fix M, astfel ca să avem :

$$|A_0| \leqslant M \,;\ |A_n| + |B_n| \leqslant M, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbf{N}.$$

În acest caz seria majorantă va fi seria geometrică :

$$M(1+\rho+\rho^2+\ldots+\rho^n+\ldots)$$

cu ρ oricît de apropiat de valoarea 1.

În această ipoteză, vor fi uniform convergente şi seriile obţinute prin derivarea seriei lui $U(r, \varphi)$ de două ori în raport cu r sau în raport cu φ, deci va fi asigurată atît existenţa soluţiei $U(r, \varphi)$ cît şi a derivatelor parţiale de ordinul doi şi introducînd seriile acestora în ecuaţia lui Laplace, se verifică şi direct că ea va fi verificată oricare ar fi coeficienţii arbitrari : A_0, A_n, B_n.

Determinarea acestor coeficienţi va rezulta din condiţia de frontieră identificînd seria funcţiei $U(1, \varphi)$ cu seria trigonometrică a funcţiei date $f(\varphi)$ adică va trebui să avem :

$$U(1, \varphi) \equiv f(\varphi) \Leftrightarrow A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \equiv$$

$$\equiv \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi),$$

unde :

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,d\theta \,;\ \alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos n\theta\,d\theta \,;\ \beta_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin n\theta\,d\theta,$$

iar, prin identificare găsim :

$$A_0 = \alpha_0 \,;\ A_n = \alpha_n \text{ şi } B_n = \beta_n,$$

de unde se vede că : A_0, A_n, B_n verifică condiţiile de majorare de mai sus deoarece coincid cu coeficienţii seriei Fourier a unei funcţii date pentru care această serie converge şi aşa cum rezultă din teoria seriilor Fourier, aceşti coeficienţi sînt mărginiţi, deci derivarea termen cu termen a fost justificată.

Introducînd valorile acestor coeficienţi în seria care ne dă soluţia $U(r, \varphi)$, avem :

$$U(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,d\theta + \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} r^n \left(\cos n\varphi \int_0^{2\pi} f(\theta)\cos n\,d\theta + \right.$$

$$\left. + \sin n\varphi \int_0^{2\pi} f(\theta)\sin n\theta\,d\theta\right)$$

sau scriind totul sub o singură integrală :

$$U(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n(\theta - \varphi)\right] d\theta.$$

Suma seriei din interiorul parantezei drepte se poate calcula efectiv, folosind calcule cu numere complexe, în modul următor:

Vom nota această sumă cu S și vom scrie:

$$S=1+2S_1,$$

unde suma:

$$S_1=\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\omega, \text{ cu : } \omega=\theta-\varphi,$$

se va calcula asociind-o cu suma altei serii:

$$S_2=\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin n\omega.$$

Construind numărul complex:

$$\sigma=S_1+iS_2=\sum_{n=1}^{\infty} r^n(\cos n\omega+i\sin n\omega)=\sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{in\omega},$$

observăm că σ este suma unei serii geometrice convergente, cu rația: $q=re^{i\omega}$, cu $|q|<1$, deoarece $r<1$.

Obținem:

$$\sigma=\frac{re^{i\omega}}{1-re^{i\omega}}=\frac{r}{e^{-i\omega}-r}=\frac{r}{(\cos\omega-r)-i\sin\omega},$$

de unde:

$$S_1=\operatorname{Re}(\sigma)=\frac{r(\cos\omega-r)}{(\cos\omega-r)^2+\sin^2\omega}=\frac{r\cos\omega-r^2}{1-2r\cos+r^2},$$

iar:

$$S=1+2S_1=\frac{1-2r\cos\omega+r^2+2r\cos\omega-2r^2}{1-2r\cos\omega+r^2}=\frac{1-r^2}{1-2r\cos\omega+r^2},$$

adică:

$$S=\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}.$$

Înlocuind acest rezultat sub integrala ce exprimă soluția $U(r,\varphi)$, avem:

$$U(r,\varphi)=\frac{1-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\theta)\,d\theta}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2},$$

egalitate care poartă numele de formula lui Poisson. Faptul că funcția $U(r,\varphi)$ definită de această formulă a lui Poisson, pentru cercul de rază $a=1$, verifică ecuația lui Laplace se poate verifica prin calcul direct, calculînd derivatele parțiale ale funcției $U(r,\varphi)$ prin derivare sub semnul integrală.

De asemenea, pentru condiția de frontieră se verifică faptul că:

$$\lim_{r\to 1} U(r,\varphi)=f(\varphi)$$

și se mai poate arăta că funcția $U(r,\varphi)$ este și continuă pe $(D) \cup (C)$, dacă $f(\varphi)$ este continuă pe (C). Rezultă într-adevăr că funcția $U(r, \varphi)$ găsită este armonică în domeniul circular D și constituie soluția lui Dirichlet pentru cercul de rază 1. Soluția problemei lui Dirichlet pentru cercul cu centrul în origine și de rază a, se obține din formula lui Poisson schimbînd r cu $\frac{r}{a}$, adică vom avea :

$$U(r, \varphi)=\frac{a^2-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\theta)\,d\theta}{a^2-2ar\cos(\theta-\varphi)+r^2}.$$

§.10. ECUAȚIA BIARMONICĂ

Să considerăm ecuația liniară neomogenă cu coeficienți constanți

$$L_4(u)=f(x, y),\ (x, y)\in D\subset \mathbf{R}^2$$

cu L_4 definit de (25) pentru $m=4$ și să punem : $a_0=a_4=1$, $a_1=a_3=0$, $a_2=2$. Obținem ecuația

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\,\partial y^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}=f(x, y), \tag{52}$$

care se aplică în teoria elasticității a plăcilor plane și curbe [55].

Dacă se notează cu Δ operatorul lui Laplace atunci se verifică ușor că

$$\Delta^2=\Delta(\Delta)=\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4}{\partial x^2\,\partial y^2}+\frac{\partial^4}{\partial y^4}. \tag{53}$$

Definiție. Operatorul liniar $\Delta^2=\Delta(\Delta)$ se numește *operatorul biarmonic*. Cu ajutorul operatorului biarmonic ecuația (52) se poate scrie

$$\Delta^2 u=f(x, y),\ (x, y)\in D\subset \mathbf{R}^2, \tag{54}$$

17. ECUAȚIA $\Delta^2 u=0$

Definiție. Ecuația

$$\Delta^2 u(x, y)=0,\ (x, y)\in D\subset \mathbf{R}^2 \tag{55}$$

se numește ecuație biarmonică.

Definiție. O funcție $u\in C^{(4)}$ care satisface ecuația (55) se numește funcție biarmonică.

Ecuația (55) se mai numește ecuația eforturilor unitare (în teoria elasticității), iar soluția ei funcția eforturilor unitare (*funcția lui Airy*).

Are loc

Teorema. Soluția generală a ecuației (55) este dată de

$$u=\mathbf{Re}\,[\bar z f_1(z)+f_2(z)+z\,f_3(\bar z)+f_4(\bar z)] \tag{56}$$

unde $z=x+iy$, $\bar z=x-iy$, iar f_j $(j=1, 2, 3, 4)$ sînt funcții analitice într-un domeniu închis D.

Într-adevăr dacă $f(z)=U(x,y)+iV(x,y)$ este o funcție analitică de variabilă complexă, atunci ținînd cont că

$$x=\frac{z+\bar{z}}{2},\quad y=\frac{z-\bar{z}}{2i},\quad (z=x+iy,\ \bar{z}=x-iy,\ i^2=-1)$$

se arată ușor că avem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial\bar{z}}=\frac{1}{4}(\Delta U+i\Delta V)$$

de unde se obține relația

$$\Delta \mathrm{Re} f=4\,\mathrm{Re}\,\frac{\partial^2 f}{\partial\bar{z}\,\partial z}\tag{57}$$

numită și *formula lui Goursat.*

Aplicînd de două ori succesiv formula lui Goursat se obține din (56):

$$\Delta^2 u=\Delta(\Delta u)=\Delta\,[4\mathrm{Re}\,(f_1'(z)+f_3'(\bar{z})]\equiv 0,$$

de unde rezultă afirmația din teoremă.

În particular se poate considera soluția exprimată cu ajutorul a două funcții analitice arbitrare

$$u(x,y)=\mathrm{Re}\,[\bar{z}\,f(z)+g(z)]=\mathrm{Re}\left[z\bar{z}\,\frac{f(z)}{z}+g(z)\right]\quad z\neq 0\tag{58}$$

de unde se deduce că are loc următorul

Corolar. Dacă u_1 și u_2 sînt funcții armonice pe un domeniu $D\subset \mathbf{R}^2$ atunci funcția definită de

$$u(x,y)=(x^2+y^2)\,u_1(x,y)+u_2(x,y)\tag{59}$$

este biarmonică pe D.

Din corolarul de mai sus se deduce imediat (pentru $u_1\equiv 0$) că are loc următorul

Corolar. Orice funcție armonică este biarmonică. Se poate arăta ușor că au loc și următoarele două afirmații:

Corolar. Dacă u_1 este o funcție armonică pe $D\subset\mathbf{R}^2$, atunci funcția definită de

$$u(x,y)=(ax+by)\,u_1(x,y),\tag{60}$$

cu a,b constante arbitrare reale, este biarmonică.

Corolar. Funcția definită de

$$u(x,y)=(ax+by)\ln(x^2+y^2),\quad (x,y)\in D\subset\mathbf{R}^2\tag{61}$$

cu a,b constante arbitrare reale, este biarmonică.

Soluții ale ecuației (55) se pot obține și prin metoda separării variabilelor. În ipoteza că se caută soluții de forma

$$u(x,y)=X(x)\,Y(y).\tag{62}$$

din (55) se obține

$$\frac{X^{(4)}}{X}+2\frac{X''}{X}\frac{Y''}{Y}+\frac{Y^{(4)}}{Y}=0, \tag{63}$$

de unde rezultă prin derivare în raport cu y

$$2\frac{X''}{X}\left(\frac{Y''}{Y}\right)'+\left(\frac{Y^{(4)}}{Y}\right)'=0 \tag{64}$$

sau

$$2\frac{X''}{X}=-\left(\frac{Y^{(4)}}{Y}\right)'\frac{1}{\left(\frac{Y''}{Y}\right)'}=-2\omega^2 \tag{65}$$

Din (65) se obțin ecuațiile diferențiale

$$X''+\omega^2X=0,\ Y^{(4)}-2\omega^2Y''+\omega^4Y=0 \tag{66}$$

Înlocuind soluțiile generale ale ecuațiilor (66) în (62) se obține

$$u\,(x,\,y)=(A_1\cos\omega x+A_2\sin\omega x)\,[(B_1+B_2y)\,\mathrm{ch}\omega y+(B_3+B_4y)\,\mathrm{sh}\omega y] \tag{67}$$

Dacă se ține cont că prin transformarea $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$, operatorul Δ devine

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \tag{68}$$

ecuația (55) poate fi scrisă în coordonate polare astfel

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2u}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}\right)=0, \tag{69}$$

Dacă se caută soluții de forma

$$u_n=R_n\,(\rho)\cos n\theta,\ n=1,2,\ldots \tag{70}$$

(sau $u_n=R^*(\rho)\sin n\theta$) obținem ecuația

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}-\frac{n^2}{\rho^2}\right)\left(\frac{\mathrm{d}^2R_n}{\mathrm{d}\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}R_n}{\mathrm{d}\rho}-\frac{n^2R_n}{\rho^2}\right)=0 \tag{71}$$

a cărei soluție generală pentru $n>1$ este dată de

$$R_n=A_n\rho^n+B_n\rho^{-n}+C_n\rho^{n+2}+D_n\rho^{-n+2},\ (n=2,\,3\ldots) \tag{72}$$

Pentru $n=0$, respectiv $n=1$ se obțin soluțiile

$$R_0=A_0+B_0\rho^2+C_0\ln\rho+D\rho^2\ln\rho \tag{73}$$

și

$$R_1=A_1\rho+B_1\rho^3+C_1\rho^{-1}+D_1\rho\ln\rho \tag{74}$$

(Expresii similare pot fi scrise și pentru R_n^*).

Problema la limită fundamentală pentru ecuația biarmonică se poate enunța astfel:

Să se determine funcția $u \in C^{(4)}$ care satisface ecuația (55) în domeniul deschis D și condițiile la limită

$$u|_{\Gamma}=\mathrm{g}(s)\ ; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma}=\mathrm{h}(s), \tag{75}$$

unde $\mathrm{g}(s)$ și $\mathrm{h}(s)$ sînt funcții continue de arcul s al conturului Γ (frontiera domeniului D).

Are loc

Teorema. Soluția ecuației (55) care satisface condițiile la limită (75) este unică.

Într-adevăr, dacă se presupune că există două soluții u_1 și u_2 atunci $v=u_1-u_2$ este de asemenea o soluție care verifică condițiile (75). Aplicînd formula lui Green

$$\iint_D (\psi\Delta\varphi-\varphi\Delta\psi)\,\mathrm{d}\sigma=\int_\Gamma\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)\mathrm{d}s,$$

funcțiilor $\varphi=v$, $\psi=\Delta v$, obținem

$$\iint_D(\Delta v)^2\,\mathrm{d}\sigma=0,$$

de unde $\Delta v=0$. Ținînd seama că $v|_\Gamma=0$, avem $v\equiv 0$ și deci $u_1\equiv u_2$.

18. ECUAȚIA $\Delta^2 u=\mathrm{f}$

Să considerăm acum ecuația neomogenă (54). Se verifică ușor că are loc:

Teorema. Soluția generală a ecuației (54) este dată de

$$u=u_1+u_0,$$

unde u_1 este soluția generală a ecuației $\Delta^2u=0$, iar u_0 este o soluție particulară a ecuației $\Delta^2u=\mathrm{f}$.

Problema la limită fundamentală pentru ecuația neomogenă $\Delta^2u=\mathrm{f}$ se enunță la fel ca și pentru ecuația omogenă $\Delta^2u=0$, (75).

Aproximarea soluției ecuației $\Delta^2u=\mathrm{f}$ cu condiții la limită liniare și omogene se poate face conform metodei Galerkin sub forma

$$u_n(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\varphi_k(x,y),$$

în ipoteza că soluția poate fi reprezentată sub formă de serie

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\varphi_k(x,y),$$

unde φ_k $(k=1,2,3,\ldots)$ este un sistem complet de funcții.